Übungen zur Vorlesung

Mathematische Statistik

Sommersemester 2012

Institut für Mathematik

Jun.-Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
RUD25, Raum 1.203
E-Mail: dickhaus@math.hu-berlin.de

Semesterwoche 10

Abgabe bis Montag, 02. Juli 2012, 13:15 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.

Aufgaben

1. **Exercise 8.5 in Chap T. Le (2003).** Nachfolgend tabelliert sind Körpergröße (gerundet auf die nächstliegenden geraden Zentimeter) und Körpergewicht (gerundet auf volle Kilogramm) von 10 Frauen und 10 Männern.

Körpergröße (♀)	152	156	158	160	162	162	164	164	166	166
Körpergewicht (♀)	52	50	47	48	52	55	55	56	60	60
Körpergröße (♂)	162	168	174	176	180	180	182	184	186	186
Körpergewicht (♂)	65	65	84	63	75	76	82	65	80	81

Diese Daten modellieren wir mit einem multiplen linearen Regressionsmodell in der Form von Modell 4.26 aus dem Skript. Dabei sei Körpergewicht die Responsevariable und neben den beiden Haupteffekten Geschlecht und Körpergröße betrachten wir zusätzlich den Wechselwirkungsterm Geschlecht $\times$ Körpergröße.

   (a) Testen Sie die Globalhypothese, dass keine der drei spezifizierten Kovariablen einen (signifikanten) Einfluss auf die Response hat.

   (b) Berechnen Sie das (multiple) Bestimmtheitsmaß des Modells und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

2. (a) Eine Lebesguedichte f auf $\mathbb{R}$ heißt <u>log-konkav</u>, falls $\log f$ eine konkave Funktion ist. Zeigen Sie, dass solch eine Lebesguedichte einen eindeutig bestimmten Modus hat.

   (b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid. auf $\mathbb{R}$ mit Lebesguedichte f_ϑ, gegeben durch $f_\vartheta(z) = f(z - \vartheta)$ für eine bekannte Funktion f und für unbekannten Parameterwert $\vartheta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
   Die (gemeinsame) Likelihoodfunktion von $X = (X_1, \ldots, X_n)$ hat ein eindeutig bestimmtes Extremum, falls die Funktion f'/f streng monoton ist. Dieses Extremum ist ein Maximum, falls f'/f streng monoton fällt. Stellen Sie eine Verbindung zu log-konkaven Lebesguedichten her.

3. Die Lebesguedichte f der standardisierten logistischen Verteilung auf $\mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) = \exp(-x)/[1 + \exp(-x)]^2, x \in \mathbb{R}$.

   (a) Nehmen Sie an, $X_1, \ldots, X_n$ seien iid. auf $\mathbb{R}$ mit Lebesguedichte f_ϑ, gegeben durch $f_\vartheta(x_i) = f(x_i - \vartheta), \vartheta \in \mathbb{R}$ (logistisches Lokationsparametermodell). Zeigen Sie die Existenz eines eindeutigen Maximum-Likelihood-Schätzers (MLEs) $\hat{\vartheta}_n$ für ϑ und berechnen Sie die Limesverteilung von $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ für $n \to \infty$.

(b) Betrachten Sie nun das entsprechende Skalenmodell. Dabei sind $X_1, \ldots, X_n$ iid. auf $\mathbb{R}$ mit Lebesguedichte f_σ, gegeben durch $f_\sigma(x_i) = \sigma f(\sigma x_i), \sigma > 0$. Zeigen Sie auch hier die Existenz eines eindeutig bestimmten Maximum-Likelihood-Schätzers (MLEs) $\hat{\sigma}_n$ für σ und berechnen Sie die Limesverteilung von $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma)$ für $n \to \infty$.

4. Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen (A1) und (A3) aus der Vorlesung die Zufallsvariable

$$\frac{\ell(\vartheta_0 + n^{-1/2}, X) - \ell(\vartheta_0, X) + I(\vartheta_0)/2}{\sqrt{I(\vartheta_0)}}$$

in Verteilung für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung strebt. Dabei bezeichnen wie in der Vorlesung $\ell(\cdot, X)$ die (gemeinsame) Likelihoodfunktion des Produktmodells und $I(\cdot)$ die eindimensionale Fisher-Information (zu einer Beobachtung X_j, $1 \leq j \leq n$).