Institut für Mathematik

Jun.-Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
RUD25, Raum 1.203
E-Mail: dickhaus@math.hu-berlin.de

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Statistik

Sommersemester 2012

Semesterwoche 7

Abgabe bis Montag, 11. Juni 2012, 13:15 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.

Aufgaben

1. Es seien X_1 und X_2 stochastisch unabhängig und identisch verteilt (iid.) mit $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$.
   (a) Zeigen Sie, dass $S = X_1 + X_2$ suffizient (für $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$) ist.
   (b) Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung von X_1 gegeben $S = s$ gleich $\text{Bin}(s, 1/2)$ ist.

2. Seien $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 2$, reellwertige iid. Zufallsvariablen, stetig verteilt mit Lebesgue-Dichte
$$f_\vartheta(z) = \sigma^{-1} \exp\left(-\frac{z-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{[\mu,\infty)}(z)$$
   von X_1 unter $\vartheta = (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Statistik $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $T(x) = (x_{1:n}, \sum_{j=2}^n x_{j:n})$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, suffizient für $\vartheta \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ ist.

3. Das statistische Experiment $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ sei dominiert vom Maß μ. Zeigen Sie: Eine Statistik $S : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ ist suffizient genau dann, wenn für jedes fest vorgegebene Parameterpaar $(\vartheta, \vartheta_0) \in \Theta^2$ der Dichtequotient $f_\vartheta(x)/f_{\vartheta_0}(x)$ eine Funktion ist, die für μ-fast alle $x \in \Omega$ nur von $S(x)$ abhängt.

4. Nehmen Sie an, $n_i \in \mathbb{N}$ Patienten erhalten in einer klinischen Studie die Dosis $d_i \in \mathbb{N}$ eines Medikamentes, $i = 1, 2$, wobei $d_1 < d_2$. Die Wirkung der Medikamentengabe für Patient j bei Dosis i sei binär kodiert (z. B.: Genesung Ja / Nein) und werde mit einer Zufallsvariablen X_{ij} modelliert. Alle $n = n_1 + n_2$ Patienten zeigen die jeweilige Wirkung unabhängig voneinander. Für $i = 1, 2$ gelte für alle $j = 1, \ldots, n_i$:
$$\mathbb{P}_\vartheta(X_{ij} = 1) = \eta_\vartheta(d_i)$$
   für einen Parameter $\vartheta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $S_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie:
   (a) $S = (S_1, S_2)^t$ ist suffizient für ϑ im Falle $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $\eta_\vartheta(d_i) = 1 - \exp(-\vartheta d_i)$.
   (b) Unter den Gegebenheiten von Teil (a) ist S nicht vollständig.