Übungen zur Vorlesung

Mathematische Statistik

Sommersemester 2012

Institut für Mathematik

Jun.-Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
RUD25, Raum 1.203
E-Mail: dickhaus@math.hu-berlin.de

Semesterwoche 8

Abgabe bis Montag, 18. Juni 2012, 13:15 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.

Aufgaben

1. Betrachten sie noch einmal das Beispiel 4.4 des einseitigen Binomialtests.
   (a) Verifizieren Sie, dass $F(p, k)$ für alle $k \in \Omega$ eine monoton fallende Funktion in $p \in \Theta = [0, 1]$ ist.
   (b) Wie wahrscheinlich ist es, die Alternative aufzudecken, falls die wahre Wahrscheinlichkeit für einen tumorbedingten Tod in der Zielgruppe der 55- bis 64-jährigen Arbeiter in dem Kernkraftwerk genau gleich der empirischen relativen Häufigkeit ist? Berechnen Sie dazu die Güte des nicht-randomisierten Tests $\tilde{\varphi}$ im Punkte $p_1 = 5/13 \in \Theta_1$.
   (c) Wie groß hätte n gewählt werden müssen, damit die Güte im Punkte $p_1 = 5/13$ von $\tilde{\varphi}$ mit $\mathbb{E}_{1/5}[\tilde{\varphi}] \leq 5\%$ den Wert 0.9 übersteigt? Was liefert diesbezüglich eine Normalapproximation?

2. (a) Es bezeichne $\beta \equiv \beta(\vartheta_1)$ die Güte des besten (Neyman-Pearson-) Tests zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für ein binäres Testproblem mit $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$. Zeigen Sie, dass dann $\alpha < \beta$ ist, sofern $\mathbb{P}_{\vartheta_0} \neq \mathbb{P}_{\vartheta_1}$ gilt.
   (b) Sei die Verteilung der Zufallsgröße X ein Element der Familie $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ und sei die Statistik $T : \Omega \to \Omega'$ suffizient für ϑ. Zeigen Sie: Ist $\varphi : \Omega \to [0, 1]$ ein Test für eine Hypothese $\Theta_0 \subset \Theta$, so ist $\psi : \Omega' \to [0, 1]$, gegeben durch $\psi(t) = \mathbb{E}_\bullet[\varphi(X)|T = t]$ ein Test, der nur von T abhängt und es gilt $\beta_\psi = \beta_\varphi$.

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ mit $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ ein dominiertes statistisches Modell. Zeigen Sie:
   (a) Die Familie $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ besitzt genau dann einen isotonen Dichtequotienten in der Identität $T = id.$, falls die gemischte zweite Ableitung der Loglikelihoodfunktion existiert und es gilt
   $$\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\, \partial x} \ln(\ell(\vartheta, x)) \geq 0 \text{ für alle } \vartheta \text{ und } x. \tag{1}$$
   (b) Eine zu (1) äquivalente Bedingung ist
   $$\ell(\vartheta, x) \frac{\partial^2}{\partial\vartheta\, \partial x} \ell(\vartheta, x) \geq \frac{\partial}{\partial\vartheta} \ell(\vartheta, x) \frac{\partial}{\partial x} \ell(\vartheta, x) \text{ für alle } \vartheta \text{ und } x.$$

4. (a) Verifizieren Sie die Aussage von Bemerkung 4.11 (im Skript).

   (b) Es sei X Poisson-verteilt mit Parameter λ und das zweiseitige Testproblem $H_0 = \{\lambda = \lambda_0\}$ gegen $H_1 = \{\lambda \neq \lambda_0\}$ sei von Interesse. Gilt unter den Bezeichnungen von Satz 4.10 (UMPU-Test), dass $k_1 > 1$ ist, so ist die Bedingung [2] aus Satz 4.10 äquivalent zu

$$\sum_{x=k_1+1}^{k_2-1} \frac{\lambda_0^{x-1}}{(x-1)!} \exp(-\lambda_0) + \sum_{i=1}^{2} (1-\gamma_i) \frac{\lambda_0^{k_i-1}}{(k_i-1)!} \exp(-\lambda_0) = 1 - \alpha.$$