Übungen zur Vorlesung

Mathematische Statistik

Sommersemester 2012

Institut für Mathematik

Jun.-Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
RUD25, Raum 1.203
E-Mail: dickhaus@math.hu-berlin.de

Semesterwoche 9

Abgabe bis Montag, 25. Juni 2012, 13:15 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.

Aufgaben

1. **Verteilungstheorie.**
   (a) Beweisen Sie Lemma 4.20 aus der Vorlesung.
   (b) Beweisen Sie Lemma 4.22 aus der Vorlesung.
   (c) Beweisen Sie Satz 4.23 aus der Vorlesung.

2. **Glücklicher Zufall.** Wir betrachten das statistische Modell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), ((\mathcal{N}(\mu, 1))^n)_{\mu \in \Theta})$. Das interessierende Testproblem sei $H_0 = \{0\}$ versus $H_1 = \{\mu_1\}$ mit $\mu_1 > 0$. Zeigen Sie:
   (a) Im Falle $\alpha = 5/1000$ und $\mu_1 = 1/2$ erhält man eine höhere Güte des besten Tests (also des Gaußtests gemäß Handout), wenn man zufällig mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ entweder $n = 2$ oder $n = 16$ wählt, als wenn der Stichprobenumfang $n = 9$ fest vorgegeben wird.
   (b) Die Güte kann weiter gesteigert werden, wenn wir zulassen, dass je nach $n \in \{n_1, n_2\}$ ein unterschiedliches Signifikanzniveau α_1 bzw. α_2 eingehalten wird und nur das *erwartete* Signifikanzniveau gleich $\alpha \in (0, 1)$ ist. Berechnen Sie die Güte in dem Falle, dass wie unter (a) $n_1 = 2$ bzw. $n_2 = 16$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/2$ und $\alpha_1 = 1/1000$, $\alpha_2 = 9/1000$ gewählt werden.

3. Angenommen, es soll die Wirkung einer Schulungsmaßnahme auf die Rechtschreibgenauigkeit von Juniorprofessor/innen (JP) geprüft werden. Dazu schreiben $n = 10$ zufällig ausgewählte JP einen 20-seitigen Text und es wird jeweils die mittlere Anzahl an Rechtschreibfehlern pro Seite ermittelt. Dann erfolgt die Schulung und im Anschluss daran schreiben die 10 JP erneut einen 20-seitigen Text. Die JP-spezifische Differenz in mittlerer Anzahl Rechtschreibfehler pro Seite (im Vergleich nach der Schulung versus vor der Schulung) ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

JP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Differenz	1.2	-2.4	-1.3	-1.3	0.2	-1.0	-1.8	0.8	-2.6	-1.4

   Wir nehmen an, dass die Differenz in mittlerer Anzahl Rechtschreibfehler pro Seite (im Vergleich nach der Schulung versus vor der Schulung) normalverteilt ist mit unbekannten Parametern μ und $\sigma^2 > 0$.
   (a) Testen Sie (zweiseitig) die Nullhypothese $H_0 : \{\mu = 0\}$ zum Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$.

(b) Welcher Stichprobenumfang wäre nötig, um bei Einhaltung des Signifikanzniveaus von $\alpha = 5\%$ eine mittlere Differenz von $\mu = -0.5$ aufzudecken, wenn $\sigma^2 = 2$ bekannt wäre?

4. Es werden $n = 105$ Berliner Mittelstufenschüler/innen in zwei Gruppen eingeteilt. Die erste Gruppe besteht aus $n_1 = 48$ Schüler/innen, deren Erziehungsberechtigte (unabhängig voneinander) einen Verdacht auf Rechenschwäche geäußert haben, die $n_2 = 57$ Schüler/innen in der zweiten Gruppe werden zufällig als „Kontrollen" ausgewählt und bei ihnen besteht dieser Verdacht nicht. Alle 105 Schüler/innen bearbeiten (unter kontrollierten, standardisierten Bedingungen) einen arithmetischen Test, dessen Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammenfassend dargestellt sind. Wir nehmen an, dass die Punktzahlen in beiden Gruppen jeweils einer Normalverteilung folgen mit Parametern (μ_1, σ_1^2) bzw. (μ_2, σ_2^2).

	1. Gruppe ($n_1 = 48$)	2. Gruppe ($n_2 = 57$)
arithmetisches Punktemittel	5.06	6.32
empirische Standardabweichung	2.036	2.189

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau von 5% (zweiseitig) die Nullhypothese gleicher Varianzen in den Gruppen, also $\{\sigma_1^2 = \sigma_2^2\}$.

(b) Testen Sie nun (einseitig), ob die mittlere Punktezahl in Gruppe 1 signifikant kleiner als die in Gruppe 2 ist ($\alpha = 1\%$).