Übungen zur Vorlesung

Mathematische Statistik

Sommersemester 2013

Institut für Mathematik

Jun.-Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
RUD25, Raum 1.203
E-Mail: dickhaus@math.hu-berlin.de
Tel.: 030/2093-5841

Übungen: Mathias Trabs
E-Mail: trabs@math.hu-berlin.de
Tel.: 030/2093-3988

Blatt 3

Abgabe bis Dienstag, 30. April 2013, 11:15 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.

Aufgaben

9. Lösen Sie Exercise 2.2.2 im Skript.

10. Lösen Sie Exercise 2.2.3 im Skript.

11. Es seien $Y_1, \ldots, Y_n$ iid. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion

$$F_{Y_1} = \theta G + (1-\theta)H \quad \text{für} \quad 0 < \theta < 1$$

von Y_1, wobei G und H stetige Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$ mit existierendem zweiten Moment seien. Wir bezeichnen die durch G bzw. H gegebenen Erwartungswerte mit $\xi = \int_{\mathbb{R}} y \, dG(y)$ und $\eta = \int_{\mathbb{R}} y \, dH(y)$ und nehmen an, dass die Momentenschätzer für $g_1(y) = y$ und $g_2(y) = y^2$ existieren.

(a) Zeigen Sie: Ist $\xi \neq \eta$, so ist ein Momentenschätzer für θ gegeben durch

$$\tilde{\theta} = \frac{\bar{Y} - \eta}{\xi - \eta} \; .$$

(b) Konstruieren Sie einen Momentenschätzer für θ in dem Fall, dass $\xi = \eta = 0$ (o.B.d.A.), aber

$$\tau_1^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 \; dG(y) \neq \tau_2^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 \; dH(y) \quad \text{gilt.}$$

12. **Programmieraufgabe: Vergleich zweier Schätzer.** Betrachten Sie noch einmal das Problem der Varianzschätzung im Gauß-Produktmodell, vgl. Seiten 30 - 31 im Skript.

(a) Erzeugen Sie mit Hilfe der `R`-Software $n = 50$ Zufallszahlen, die sich wie Realisierungen von $Y_1, \ldots, Y_n$ iid. verhalten, wobei $Y_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma^2 = 5$ gilt.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des `R`-Kommandos `var` den Wert des Momentenschätzers $\tilde{\sigma}^2$ gemäß Theorem 2.2.1 sowie den Wert des erwartungstreuen Schätzers $\hat{\sigma}^2 = n\tilde{\sigma}^2/(n-1)$.

(c) Schreiben Sie eine `R`-Funktion, die die Berechnungsschritte unter (a) und (b) für gegebenes n (Übergabeparameter) durchführt und die berechneten Werte von $\tilde{\sigma}^2$ und $\hat{\sigma}^2$ als Ausgabe zurückliefert.

(d) Führen Sie eine Computersimulation durch, indem Sie Ihre Funktion aus Teil (c) B-mal hintereinander (in einer Schleife) aufrufen und die berechneten Werte von $\tilde{\sigma}^2$ und $\hat{\sigma}^2$ jeweils abspeichern. Nach Durchlaufen aller Schleifeniterationen, berechnen Sie

(i) die mittlere Abweichung vom wahren Wert $\sigma^2 = 5$ (also die empirische Verzerrung) von $\tilde{\sigma}^2$ und $\hat{\sigma}^2$ über die B Iterationen hinweg.

(ii) die mittlere quadratische Abweichung vom wahren Wert $\sigma^2 = 5$ (also das empirische quadratische Risiko) von $\tilde{\sigma}^2$ und $\hat{\sigma}^2$ über die B Iterationen hinweg.