Übungen zur Vorlesung

Mathematische Statistik

Sommersemester 2013

Institut für Mathematik

Jun.-Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
RUD25, Raum 1.203
E-Mail: dickhaus@math.hu-berlin.de
Tel.: 030/2093-5841

Übungen: Mathias Trabs
E-Mail: trabs@math.hu-berlin.de
Tel.: 030/2093-3988

Blatt 5

Abgabe bis Dienstag, 14. Mai 2013, 11:15 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.
Bitte jede Aufgabe auf einem separaten **Blatt** bearbeiten, Danke!

Aufgaben

17. **Momenten- und Maximum Likelihood-Schätzer.**
    (a) Lösen Sie Exercise 2.8.1 im Skript.
    (b) Lösen Sie Exercise 2.8.2 im Skript.

18. **Exponentialfamilien.**
    (a) Lösen Sie Exercise 2.11.1 im Skript.
    (b) Lösen Sie Exercise 2.11.2 im Skript.
    (c) Lösen Sie Exercise 2.11.3 im Skript.
    Hinweis: Sie erhalten bereits die volle Punktzahl für diese Teilaufgabe, wenn Sie zwei Zeilen aus Table 2.1 verifizieren.

19. **Exponentialfamilien, Beispiele.**
    (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen Exponentialfamilien bilden. Geben Sie jeweils den natürlichen Parameter der Familie an.
    (i) Familie der Poissonverteilungen mit Intensitätsparameter $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.
    (ii) Familie der Chi-Quadrat-Verteilungen mit $\nu \in \mathbb{N}$ Freiheitsgraden, in Zeichen χ^2_ν.
    Hinweis: Die Lebesguedichte der χ^2_ν-Verteilung ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^{\nu/2-1}\exp(-x/2)}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

    (iii) Familie der Gammaverteilungen mit Parametern $\alpha > 0$ und $r > 0$.
    Hinweis: Die Gammaverteilung mit Parametern $\alpha > 0$ und $r > 0$ besitzt die Lebesguedichte

$$f(x) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\,x^{r-1}\exp(-\alpha x)\,\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Dabei bezeichnet Γ die Euler'sche Gammafunktion, definiert durch

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty y^{r-1} \exp(-y) dy, \ r > 0.$$

(b) Zeigen Sie: Bildet eine dominierte Familie $(\mathbb{P}_\theta : \vartheta \in \Theta)$ eine Exponentialfamilie, so ist (notwendigerweise) der Träger von $\mathbb{P}_\theta$, also die Menge aller Punkte $y \in \mathcal{Y}$, für die die Likelihoodfunktion echt positiv ist, für alle $\theta \in \Theta$ identisch.

20. **Programmieraufgabe.** Die negative Binomialverteilung ist eine zweiparametrische diskrete Verteilung mit Parametern $k \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$, in Zeichen: $\mathrm{NB}(k,p)$. Ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion (Zähldichte) ist gegeben durch

$$f_{k,p}(\ell) = \binom{\ell + k - 1}{k-1} p^k (1-p)^\ell, \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Ist $X \sim \mathrm{NB}(k,p)$, so gilt $\mathbb{E}[X] = k(1-p)/p$ und $\mathrm{Var}(X) = k(1-p)/p^2$.

a) Geben Sie die Momentenschätzer für k und p basierend auf einer iid. Stichprobe vom Umfang n an.

b) Machen Sie sich mit der `R`-Funktion `mle2` aus dem Paket `bbmle` vertraut.

c) Die Zahl von kariösen bzw. gefüllten Zahnflächen (d_3f-Flächen) aus einer Stichprobe von 467 Kindern ist in der folgenden Tabelle (nach „Oralprophylaxe“ von P. Städtler) wiedergegeben. Benutzen Sie die Funktion `mle2`, um an diese Stichprobe eine negative Binomialverteilung nach der Maximum-Likelihood-Methode anzupassen. Benutzen Sie dabei die MOM-Schätzwerte als Startwerte.

d_3f-Flächen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Anzahl Kinder	221	32	42	27	27	13	11	9	8	14	6	5	4	7

d_3f-Flächen	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	> 25
Anzahl Kinder	6	4	4	1	1	3	3	3	3	-	1	1	11