Übungen zur Vorlesung

Mathematische Statistik

Sommersemester 2013

Institut für Mathematik

Jun.-Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
RUD25, Raum 1.203
E-Mail: dickhaus@math.hu-berlin.de
Tel.: 030/2093-5841

Übungen: Mathias Trabs
E-Mail: trabs@math.hu-berlin.de
Tel.: 030/2093-3988

Blatt 12

Abgabe bis Dienstag, 02. Juli 2013, 11:15 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.
Bitte jede Aufgabe auf einem separaten **Blatt** bearbeiten, Danke!

Aufgaben

45. **Chi-Quadrat-Tests für Gaußsche Varianzen.**

    (a) Lösen Sie Exercise 6.4.8 im Skript.

    (b) Lösen Sie Exercise 6.4.9 im Skript.

    (c) Lösen Sie Exercise 6.4.10 im Skript.

46. **Likelihood-Quotienten-Tests in Exponentialfamilien.**

    (a) Lösen Sie Exercise 6.6.1 im Skript.

    (b) Lösen Sie Exercise 6.6.2 im Skript.

47. **Konstruktion eines Likelihood-Quotienten-Tests.** Beim Messen einer Probe mit einer Waage wird der Wägefehler als zufällig angenommen. Die Varianz des Wägefehlers sei mit $\sigma^2 = 40$ Gewichtseinheiten angegeben. Gehen Sie davon aus, dass bei wiederholten Messungen die Wägefehler als Realisierungen von unabhängigen, zentriert normalverteilten Zufallsvariablen angesehen werden können. Von dem Gewicht θ einer Probe wurde bisher behauptet, dass es mindestens 200 Gewichtsinheiten beträgt. Diese Behauptung soll nun geprüft werden. Die Hypothese $H_0 : \theta \geq 200$ soll also gegen die Alternative $H_1 : \theta < 200$ zum Niveau α getestet werden. Für die Entscheidungsfindung stehen $n > 1$ Messwerte $y_1, \ldots, y_n$ zur Verfügung.

    (a) Bestimmen Sie den Likelihood-Quotienten Test für dieses Testproblem.

    (b) Welche Entscheidung ist nach (a) zu treffen, wenn $n = 10$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 1960$ und $\alpha = 0.01$ ist?

    (c) Skizzieren Sie die Gütefunktion des Tests unter (b).

48. **Programmieraufgabe.** Erzeugen Sie wiederholt mit dem Computer 81 (Pseudo–) Zufallszahlen, die sich wie Realisierungen von auf $\{0, 1, \ldots, 9\}$ Laplace-verteilten (diskret gleichverteilten), stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen verhalten. Bestimmen Sie in jedem

Simulationsdurchlauf die Häufigkeiten n_i für das Auftreten der Zahl $0 \le i \le 9$ und damit den jeweiligen Wert der χ^2–Teststatistik

$$T = \sum_{i=0}^{9} \frac{(N_i - 81/10)^2}{81/10}$$

auf Anpassung an die angegebene Laplace-Verteilung. Die folgende Tabelle enthält für einige Werte t, die die Zufallsvariable T annehmen kann, die approximativen Wahrscheinlichkeiten $p(t)$ dafür, dass T unter der Nullhypothese der angegebenen Laplace-Verteilung den Wert t nicht unterschreitet (Chi-Quadrat-Approximation mit 9 Freiheitsgraden).

t	21.67	19.02	16.92	14.68	12.24	10.66	9.41	8.34	7.36	6.39	5.38	4.17
$p(t)$	0.01	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

Tabelle 1: Datenmaterial zu Aufgabe 48

Nimmt für eine konkrete Stichprobe die Zufallsvariable T den Wert t an und unterschreitet der „p–Wert" $p(t)$ eine vorgegebene Zahl $\alpha \in (0, 1)$, so sagt man, dass die Nullhypothese der angegebenen Laplace-Verteilung zum Signifikanzniveau α verworfen werden kann.

(a) Bestimmen Sie empirische p-Werte für die Werte von t aus Tabelle 1 basierend auf den von Ihnen erzeugten Pseudo-Zufallszahlen, und beurteilen Sie damit die Genauigkeit der Chi-Quadrat-Approximation in Tabelle 1. Damit Ihre Resultate hinreichend aussagekräftig sind, sollten Sie eine große Anzahl an Simulationsdurchläufen wählen.

(b) Wie könnte man einen exakten p-Wert berechnen, der nicht auf der Chi-Quadrat-Approximation beruht?