Übung zur Vorlesung

Multiples Testen

Jun.-Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
RUD25, Raum 1.203
www.math.hu-berlin.de/~dickhaus/
dickhaus@math.hu-berlin.de
Tel.: 030/2093-5841

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2010

Blatt 3

Aufgaben

11. **Monotonie von Likelihood Ratio-basierten Testfamilien**

    Sei X ein Zufallsvektor mit Werten in $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ und mit der Dichte f_ϑ bezüglich eines σ-finiten Maßes μ für $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Ferner sei eine Testfamilie $(\mathcal{H}, \mathcal{T})$ mit $\mathcal{H} = \{H_i, i \in I^*\}$, $\mathcal{T} = \{T_i, i \in I^*\}$ und $I^* = \{0, 1, \ldots, m\}$ gegeben.

    Zeigen Sie: Falls alle Teststatistiken $T_i, i \in I^*$ auf Likelihood Ratio-Statistiken beruhen, so ist $(\mathcal{H}, \mathcal{T})$ monoton im Sinne von Definition 3.2. Dabei ist eine Likelihood Ratio-Statistik für ein Testproblem H_i versus K_i, $i \in I^*$ mit $H_i + K_i = \Theta$ gegeben als eine monoton fallende Funktion des folgenden Quotienten:

    $$\sup_{\vartheta \in H_i} f_\vartheta(x) / \sup_{\vartheta \in \Theta} f_\vartheta(x).$$

12. **Erweiterter Korrespondenzsatz**

    Beweisen Sie den erweiterten Korrespondenzsatz 3.9.

13. **GT2-Test von Hochberg und Scheffé-Test in Handrechnung**

    Von Interesse sei der Vergleich des durchschnittlichen Gewichts dreier Apfelsorten. Leider ist bei einem Sturm fast die komplette Ernte vernichtet worden und Sie finden von den Sorten „Sonnenschein“ und „Morgenröte“ jeweils nur vier brauchbare Äpfel und von der Sorte „Jonas“ fünf brauchbare Exemplare. Deren Gewichte sind in der folgenden Tabelle notiert:

    Apfelgewicht in g

Sonnenschein	Morgenröte	Jonas
97.1	99.3	102.5
99.5	100.3	100.9
98.8	101.3	101.6
98.3	99.0	101.8
		101.4

    Mögen die Zufallsvariablen $X_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, \ldots, n_i$ mit $n_i = 4 + \mathbf{1}\{i = 3\}$ die Apfelgewichte beschreiben und es werde Modell 3.10 für $X = (X_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, \ldots, n_i)$ angenommen.

    Führen Sie unter Zuhilfenahme von Tafeln für die „maximum modulus“- und die F-Verteilung alle drei paarweisen Sortenmittelwertsvergleiche in Handrechnung zum multiplen Niveau $\alpha = 0.05$ durch

    (a) mit der GT2-Methode von Hochberg.

(b) mit dem Scheffé-Test.

(c) Vergleichen Sie die unter (a) und (b) gewonnenen Aussagen.

14. **Dunnett- und Tukey-Test in Handrechnung**

Im Rahmen einer landwirtschaftlichen Versuchsreihe sei man an Kohlkopferträgen bei Verwendung verschiedener Düngemittel interessiert. Dazu seien $X_{ij}, i = 1, \ldots, 4, j = 1, \ldots, 5$ Zufallsvariablen, die die Ernteerträge des j-ten Kohlkopfes in der zu Dünger i gehörigen Stichprobe beschreiben. Für $X = X_{ij}, i = 1, \ldots, 4, j = 1, \ldots, 5$ werde Modell 3.10 angenommen. Das erhobene Datenmaterial ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Kohlkopfgewicht in g			
Dünger 1	Dünger 2	Dünger 3	Dünger 4
728	974	548	450
955	748	682	405
823	937	763	529
1161	904	617	759
972	869	632	397

(a) Nehmen Sie an, dass Düngemittel 1 ein Standardprodukt ist, während die anderen neu entwickelte Produkte darstellen. Testen Sie mit dem „many-one t-Test“ von Dunnett zum multiplen Niveau $\alpha = 0.01$ in Handrechnung, ob sich zwischen dem Standardprodukt und jedem einzelnen der drei neu entwickelten Produkte hinsichtlich des mittleren Kohlkopfertrags ein Unterschied feststellen lässt.

(b) Führen Sie den Tukey-Test zum multiplen Niveau $\alpha = 0.01$ zum paarweisen Vergleich aller vier Mittelwerte durch. Vergleichen Sie die damit gewonnenen Aussagen für die Fragestellung unter (a) mit denen, die der „many-one t-Test“ von Dunnett zum multiplen Niveau $\alpha = 0.01$ geliefert hat.

15. **Programmieraufgabe**

Betrachten Sie das bereits in der Vorlesung andiskutierte Beispiel von Keuls (1952, Euphytica 1, 112-122). Führen Sie unter Zuhilfenahme der `R`-Software alle 78 paarweisen Sortenmittelwertsvergleiche zum multiplen Niveau $\alpha = 0.05$ durch

(a) mit dem Bonferroni t-Test.

(b) mit dem Scheffé-Test.

(c) mit dem Tukey-Test.

(d) Machen Sie Aussagen zum Gütevergleich der drei unter (a), (b) und (c) angewendeten Methoden anhand dieses Datensatzes.