Stochastik–Praktikum
Simulation stochastischer Prozesse

Thorsten Dickhaus

Humboldt-Universität zu Berlin

15.10.2010

Übersicht

Vorbemerkungen

Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ist eine indizierte Kollektion von Zufallsgrößen.

Genauer: $X : \Omega \times \mathcal{T} \to (\mathcal{X}, \mathcal{F})$,
$X(\omega, t) := X_t(\omega)$ messbar $\forall t \in \mathcal{T}$.

Spezialfall $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{N}$ und $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$: Zeitreihen

Wird $\omega^* \in \Omega$ fixiert, so heißt $X(\omega^*, \cdot)$ ein Pfad des stochastischen Prozesses X.

Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$: Wachsende Familie von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{X}$

$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}, \mathbb{P})$ heißt gefilterter Wahrscheinlichkeitsraum.

Übersicht

Random Walk

Definition

Es seien $Z_i, i \in \{1, \dots, n\}$, i. i. d. Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(Z_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Z_i = -1)\ .$$

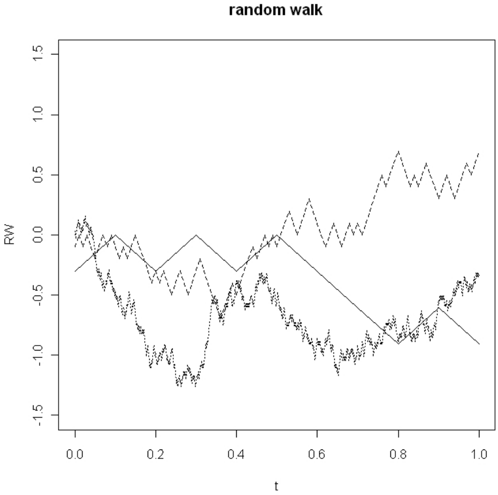
Die Zufallsvariable $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ beschreibt eine (eindimensionale) Irrfahrt (random walk) in $\mathbb{Z}$.
Für $p = 1/2$ ist dies die so genannte symmetrische Irrfahrt.

S_n nimmt Werte in $[-n, n]$ an. $\forall n$: $\mathbb{E}[S_n] = 0$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = n$.

Reskaliert konvergiert die symmetrische Irrfahrt gegen eine (eindimensionale) Brownsche Bewegung:

$$\frac{S_{[n\,t]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} B_t.$$

Reskalierter symmetrischer Random Walk



Brownsche Bewegung

Definition

Sei $(\mathcal{F}_t)$ eine Filtration. Ein $(\mathcal{F}_t)$–adaptierter stochastischer Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ heißt Standard Brownsche Bewegung (oder Standard Wiener–Prozess) bzgl. $(\mathcal{F}_t)$, falls gilt:

(BB1) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-f. s.,

(BB2) Für alle $t \geq s$ ist $(B_t - B_s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$,

(BB3) Zuwächse $(B_t - B_s)$, $0 \leq s \leq t$, sind $\mathbf{N}(0, t - s)$–verteilt,

(BB4) $(B_t)_{t \geq 0}$ hat $\mathbb{P}$–f. s. stetige Pfade.

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ (Spiegelungsprinzip)

(ii) Für festes $s \geq 0$: $B_t^2 := B_{s+t} - B_s\,, t \geq 0$ (Zeithomogenität)

(iii) Für festes $c > 0$: $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t}\,, t \geq 0$ (Skalierung)

(iv) Für festes $T > 0$: $B_t^4 := B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ (Zeitinversion)

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ (Inversion)

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ (Spiegelungsprinzip)

(ii) Für festes $s \geq 0$: $B_t^2 := B_{s+t} - B_s$, $t \geq 0$ (Zeithomogenität)

(iii) Für festes $c > 0$: $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t}$, $t \geq 0$ (Skalierung)

(iv) Für festes $T > 0$: $B_t^4 := B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ (Zeitinversion)

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ (Inversion)

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ (Spiegelungsprinzip)

(ii) Für festes $s \geq 0$: $B_t^2 := B_{s+t} - B_s\,,\, t \geq 0$ (Zeithomogenität)

(iii) Für festes $c > 0$: $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t}\,,\, t \geq 0$ (Skalierung)

(iv) Für festes $T > 0$: $B_t^4 := B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ (Zeitinversion)

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ (Inversion)

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ (Spiegelungsprinzip)

(ii) Für festes $s \geq 0$: $B_t^2 := B_{s+t} - B_s$, $t \geq 0$ (Zeithomogenität)

(iii) Für festes $c > 0$: $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t}$, $t \geq 0$ (Skalierung)

(iv) Für festes $T > 0$: $B_t^4 := B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ (Zeitinversion)

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ (Inversion)

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ (Spiegelungsprinzip)

(ii) Für festes $s \geq 0$: $B_t^2 := B_{s+t} - B_s$, $t \geq 0$ (Zeithomogenität)

(iii) Für festes $c > 0$: $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t}$, $t \geq 0$ (Skalierung)

(iv) Für festes $T > 0$: $B_t^4 := B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ (Zeitinversion)

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ (Inversion)

Markov-Eigenschaft und Simulation

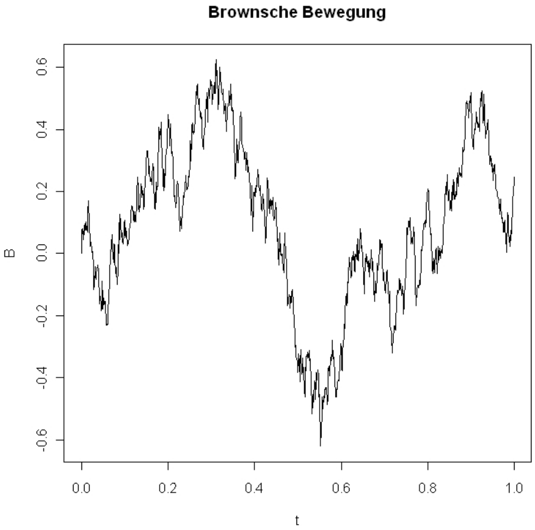
Korollar

Aus den Eigenschaften der Brownschen Bewegung und dem vorangehenden Satz folgt die Markov–Eigenschaft:

$$\tilde{B}_t := B_{s+t} - B_t \,, s \geq 0 \,,\; t \geq 0$$

ist eine Brownsche Bewegung und unabhängig von $\mathcal{F}_s$.

```
> BB<-function(B0,T,n){
+ B<-c(B0,cumsum(rnorm(n,mean=0,sd=sqrt(T/n)))+B0)
+  plot(seq(0,T,length=(n+1)),B,
+  main="Brownsche  Bewegung",type="l")}

> BB(0,1,1000)
```


Brownsche Bewegung
B
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t

Weitere Eigenschaften der Brownschen Bewegung

Satz

Es sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt:

1. Die Pfade von B sind fast sicher nirgends differenzierbar.
2. Die Pfade von B sind auf jedem Intervall fast sicher von unbeschränkter Variation.
3. Das Wachstumsverhalten lässt sich durch das Gesetz vom iterierten Logarithmus beschreiben:

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log\log(t)}} = 1 \quad \text{für } \mathbb{P} - \text{fast alle } \omega \in \Omega.$$

4. B ist zentrierter Gauß–Prozess mit $\mathbb{C}\mathrm{ov}(B_s, B_t) = s \wedge t$ $\forall s, t \geq 0 \;\Leftrightarrow\;$ B ist Brownsche Bewegung.

Konstruktion nach Paul Lévy

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $D_n = \{k/2^n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n\}$ und $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

$(Z_t)_{t \in D}$ sei eine Folge standardnormalverteilter Zufallsvariablen.

Funktionenfolge $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_0(t) = tZ_1$ und

$$F_n(t) = \begin{cases} \frac{Z_t}{\sqrt{2^{n+1}}}, & t \in D_n \backslash D_{n-1}, \\ 0, & t \in D_{n-1}, \\ \text{linear interpoliert}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Konstruktion nach Paul Lévy

$B_0 = 0$, $B_1 = Z_1$ und $B_t = \frac{B_t^- + B_t^+}{2} + \frac{Z_t}{\sqrt{2^{n+1}}}$, wobei B_t^+ den rechten und B_t^- den linken Nachbarpunkt nach einer Intervallhalbierung bezeichnen.

Der entstehende Prozess hat zur Zeit t die Varianz t. Es gilt z. B. für die ersten Schritte

$$B_{1/2} = \frac{B_0 + B_1}{2} + \frac{Z_{1/2}}{2},$$

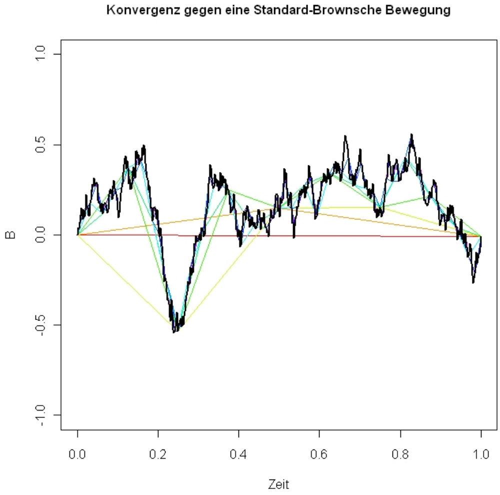
$$B_{1/4} = \frac{B_0 + B_{1/2}}{2} + \frac{Z_{1/4}}{\sqrt{8}},$$

$$B_{3/4} = \frac{B_{1/2} + B_1}{2} + \frac{Z_{3/4}}{\sqrt{8}}.$$

R Code: Lévy–Konstruktion Brownscher Bewegung

```
> B=array(data=0,dim=2)
> B[2]=rnorm(n=1,mean=0,sd=1)

> H=10
> for (i in 2:H) {
+   old=B
+   for (t in 1:2^(i-2)) {
+     B[2*t-1] = old[t]
+     B[2*t]   = rnorm(n=1, mean=(old[t]+old[t+1])/2,
+                sd=(1/(sqrt(2)^i)))}
+   B[2^(i-1)+1] = old[2^(i-2)+1]
+ }
```

Lévy–Konstruktion Brownscher Bewegung

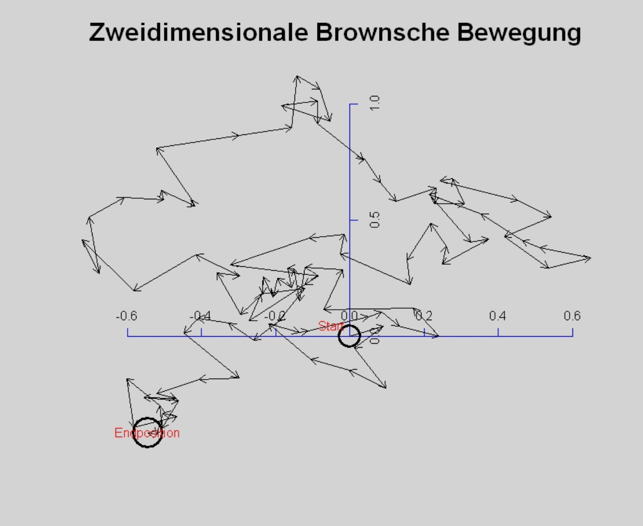


Zweidimensionale Brownschen Bewegung

Definition

Ein stochastischer Prozess $(\mathfrak{B}_t)_{t\geq 0}$ mit Werten im $\mathbb{R}^d$ heißt d-dimensionale Brownsche Bewegung, falls die Koordinaten $(B_i)_t$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, stochastisch unabhängige eindimensionale Standard Brownsche Bewegungen sind.

```
> n<-100
> x<-rnorm(n,mean=0,sd=1/sqrt(n))
> y<-rnorm(n,mean=0,sd=1/sqrt(n))
> Bx[1]<-0
> By[1]<-0
> for (t in 1:n) {
+   Bx[t+1]<-Bx[t]+x[t]
+   By[t+1]<-By[t]+y[t]
+ }
```


Zweidimensionale Brownsche Bewegung
1.0
0.5
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
Start
Endposition

Ersteintrittszeit, gestoppter Prozess

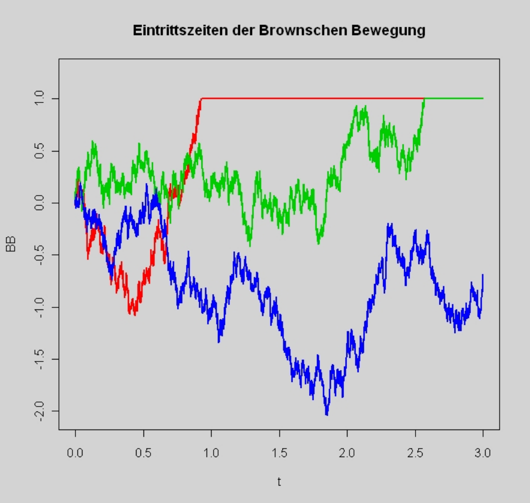
Zeitpunkt des ersten Erreichens von $h \in \mathbb{R}$ einer Standard Brownschen Bewegung ist die Stoppzeit

$$\tau(h) = \inf\{t > 0 | B_t = h\} .$$

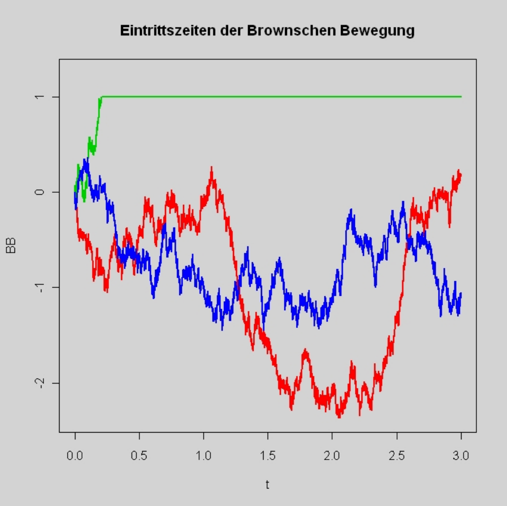
Ziele:

- Simulation der bei h gestoppten Brownsche Bewegung
- Schätzung der Verteilung der Eintrittszeiten durch Monte–Carlo–Simulation und Kerndichteschätzung

Simulation gestoppte Brownsche Bewegungen ($h = 1$)



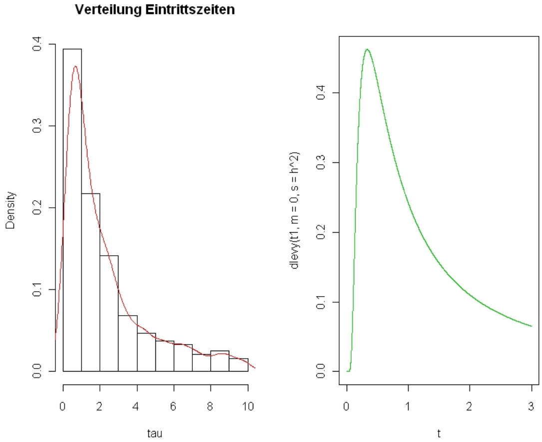
Simulation gestoppte Brownsche Bewegungen ($h = 1$)



which()-Kommando in R

```
> N<-100
> n<-10000
> BRM<-matrix(ncol=N,nrow=n+1)
> h<-1
> tau<-c(rep(NA),N)

> for(j in 1:N){
+ BRM[,j]=c(0,cumsum(rnorm(n,mean=0,sd=sqrt(T/n))))
+ tau[j]=which(BRM[,j]>h)[1]}
> tau<-sort(tau)/n*T

> par(mfrow=c(1,2))
> hist(tau,freq=FALSE,main="Verteilung Eintrittszeiten")
> lines(density(tau),col=2)
```

Verteilung der Eintrittszeiten



Theoretische Verteilung der Eintrittszeiten

$$\tau(h) = \inf\{t > 0 | B_t = h\}$$

ist Lévy–verteilt mit Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = h^2$.

Dichtefunktion der Lévy–Verteilung:

$$\ell(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\sigma}{2(x-\mu)}\right), x > \mu.$$

$\Rightarrow$ Obige Konstruktion liefert eine Möglichkeit, Zufallsstichproben gemäß $\ell(x)$ zu erzeugen.

Diffusionen

Unter einem Diffusionsprozess versteht man in der Stochastik einen Prozess der Form

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$$

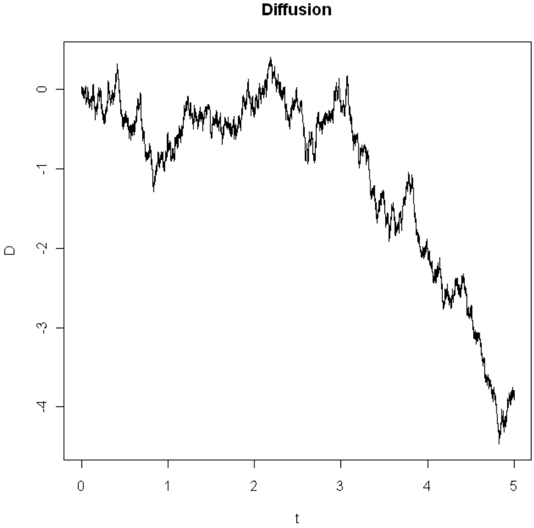
mit einer Standard Brownschen Bewegung B.

X_t wird auch als allgemeine Brownsche Bewegung mit Drift μ und Volatilität σ bezeichnet.

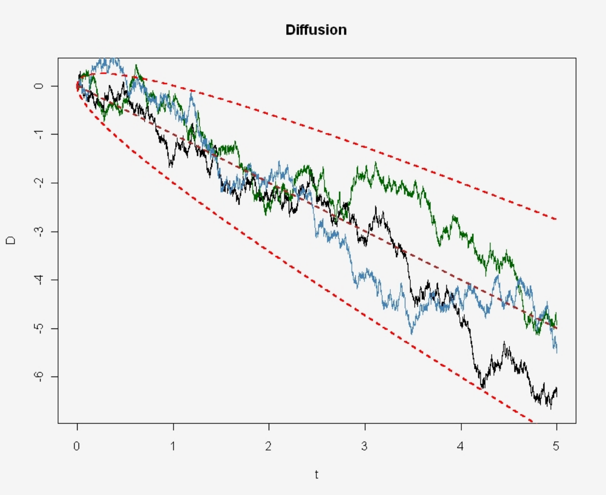
Einen Prozess mit zeitabhängigen Drift und Volatilität bezeichnet man als Itô–Prozess.

R Code: Diffusion

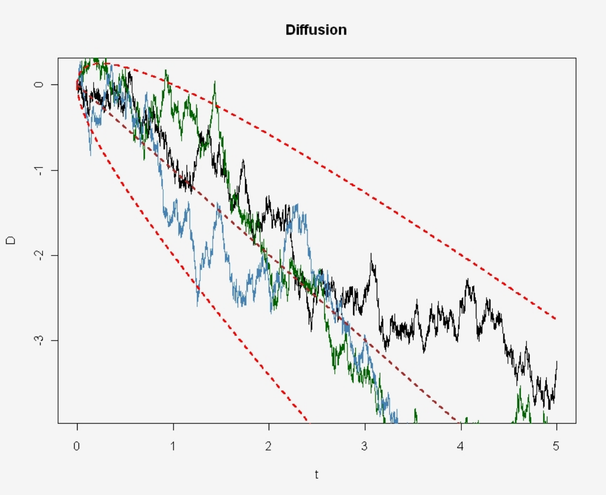
```
> Diff<-function(B0,mu,sigma,T,n){
+ dt<-T/n
+ D<- c(rep(NA,n))
+ t<- c(rep(NA,n))
+ t[1]<-0
+ for(j in 2:n){
+ t[j]<- t[j-1]+ dt}
+ D[1]<- B0
+ for(j in 2:n){
+ D[j]<- D[j-1]+mu*dt+ sigma*sqrt(dt)*rnorm(1, mean=0, sd=1)}
+ plot(t,D,type="l",main="Diffusion")}

> Diff(0,-1,1,5,10000)
```


Diffusion
D
0
-1
-2
-3
-4
t
0
1
2
3
4
5

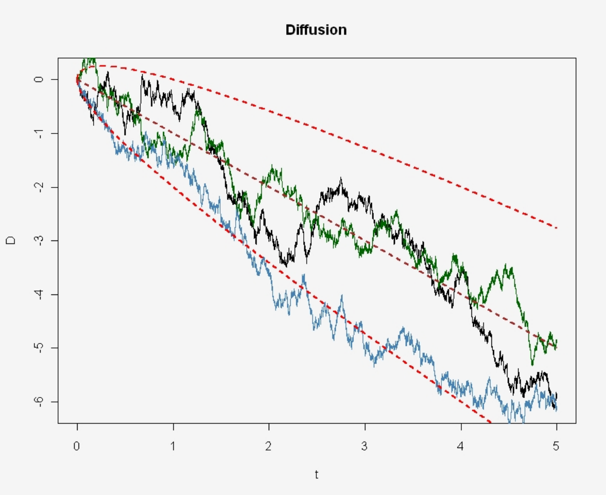
Diffusion mit Konfidenzbändern



Diffusion mit Konfidenzbändern



Diffusion mit Konfidenzbändern



Übersicht

Definition

Es sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung.
Für einen fest gewählten Zeitpunkt $T \geq 0$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ heißt der Prozess

$$\mathbb{B}_t = (B_t | B_T = c), t \geq 0$$

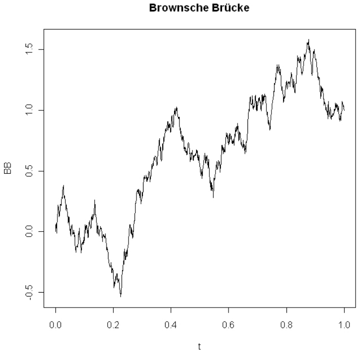
Brownsche Brücke.

Charakterisierung: $\mathbb{B}_t = B_0 + B_t - t(B_0 + B_t - c)/T$,

Erwartungswert: $\mathbb{E}[\mathbb{B}_t] = B_0(1 - t/T) + (ct/T)$,

Kovarianzfunktion: $\mathbb{C}\text{ov}(\mathbb{B}_s\,, \mathbb{B}_t) = s \wedge t - (st)/T$.

```
> BBridge<-function(x,y,t0,T,n){
+ dt<-(T-t0)/n
+ t<-seq(t0,T,length=n+1)
+ B<-c(0,cumsum(rnorm(n)*sqrt(dt)))
+ BB<-x+B-(t-t0)/(T-t0)*(B[n+1]-y+x)
+ plot(t,BB,type="l",main="Brownsche Brücke")}
> BBridge(0,1,0,1,1000)
```



Übersicht

Definition

$(B_t)_{t\geq 0}$ eine $(\mathcal{F}_t)$–adaptierte Standard Brownsche Bewegung.
Die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dB_t$$

mit Startwert X_0 ist explizit lösbar durch

$$X_t = X_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dB_t,$$

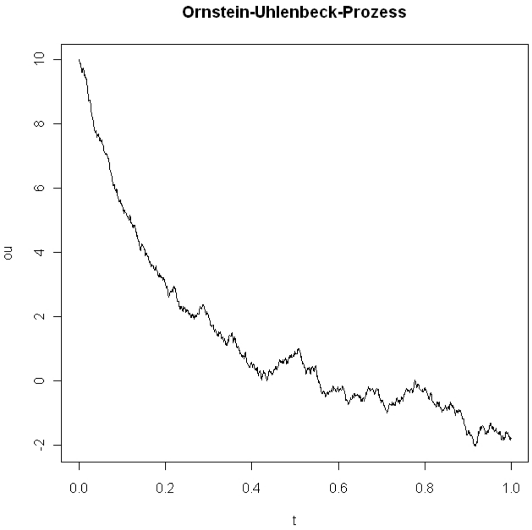
den Ornstein–Uhlenbeck Prozess mit mean reversion level μ, mean reversion rate θ und Rauschniveau σ.

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X_t] = X_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t})$,

Kovarianzfunktion: $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_s\,,\,X_t) = (\sigma^2/2\theta)\left(e^{-\theta|s-t|} - e^{\theta(s+t)}\right)$.

R Code: Simulation eines OU–Prozesses

```
> OU<-function(x0,sigma,theta,n){
+ t<-c(rep(NA),n)
+ t[1]<-0
+ for(j in 2:n){
+ t[j]<-t[j-1]+1/n}
+ B<-c(rep(NA),n)
+ B[1]<-0
+ for(j in 2:n){
+ B[j]<-B[j-1]+sqrt(1/n)*sigma*rnorm(1)}
+ ito.sum<-c(0,sapply(2:n,function(x) {exp(-theta*(t[x]-t[x-1]))
+ *(B[x]-B[x-1])}))
+ ou<-c(rep(NA),n)
+ ou[1]<-x0
+ ou<-sapply(1:n,function(x) {ou[1]*exp(-theta*t[x])
+ +sum(ito.sum[1:x])})
+ plot(t,ou,main="Ornstein-Uhlenbeck-Prozess",type="l")}

> OU(10,2,6,1000)
```


Ornstein-Uhlenbeck-Prozess
ou
10
8
6
4
2
0
-2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t

Übersicht

Poisson–Prozess

Definition

Poisson–Prozess N: Adaptierter Zählprozess, für den gilt:

1. $\forall s, t\,,\ 0 \leq s < t < \infty : (N_t - N_s)$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$.
2. $\forall s, t, u, v$ mit $0 \leq s < t < \infty$, $0 \leq u < v < \infty$, $t - s = v - u$: $(N_t - N_s) \sim (N_v - N_u) \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s))$.

Pfad eines Poisson–Prozesses hat Sprünge der Höhen 1, ist stückweise konstant und càdlàg (rechtsseitig stetig, linksseitige Limiten).

Anzahl der Sprünge N_t zur Zeit t ist Poisson–verteilt mit Parameter $\lambda \cdot t$

λ Intensität des Prozesses, $\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{V}\text{ar}(N_t) = \lambda t$.

Zusammengesetzter Poisson–Prozess

Definition

Sei $N = (N_t)_{t \geq 0}$ ein Poisson–Prozess mit Intensität λ und $(Y_k)_{k \geq 1}$ eine i. i. d. Folge von Zufallsvariablen, stochastisch unabhängig von N. Dann heißt

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

zusammengesetzter Poisson–Prozess.

Satz

Gegeben $N(T) = n$ sind die Sprungzeitpunkte $T_1, \ldots, T_n$ auf $[0, T]^n$ genauso verteilt wie die Ordnungsstatistiken von n unabhängigen auf $[0, T]$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

Beweisidee:

$N_t = 1\,,\ t > 0$: Sprungzeit ist uniform auf $[0, t]$ verteilt, denn es gilt für $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{P}\left(T_1 \leq s | N_t = 1\right) = \frac{\mathbb{P}\left(T_1 \leq s\,,\ N_t = 1\right)}{\mathbb{P}\left(N_t = 1\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(N_s = 1\,,\ N_t - N_s = 0\right)}{\mathbb{P}\left(N_t = 1\right)} = \frac{s}{t}\ .$$

Gemeinsame Dichte: $f(t_1, \ldots, t_n) = \dfrac{n!}{T^n} \mathbb{1}_{\{0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq T\}}$.

Wartezeiten

$$W_i = \Delta T_i = (T_i - T_{i-1}) \; , i \in \{1, \ldots, n\} \; , \overset{i.i.d.}{\sim} Exp(\lambda) \; , \; T_0 := 0.$$

Die gemeinsame Dichte der Wartezeiten ist damit

$$g(w_1, \ldots, w_n) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum w_i\right) \prod_i \mathbb{1}_{\{w_i > 0\}}.$$

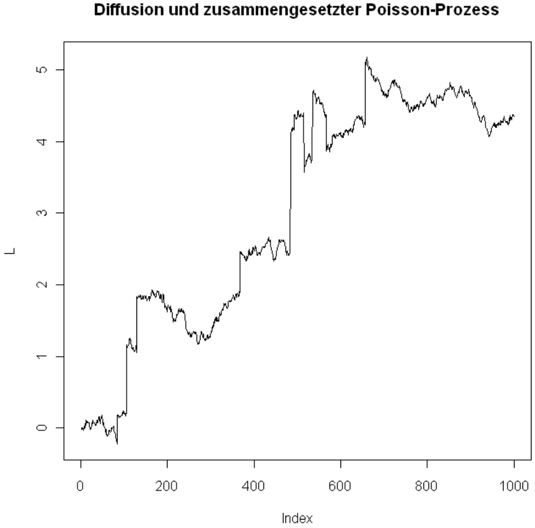
Bedingt auf $N_t = n$ ergibt sich:

$$\tilde{g}\,(w_1, \ldots, w_n | N_t = n) = \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} \; \lambda^n e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le t\}} \; .$$

Wie bei der Brownschen Bewegung bietet es sich also auch hier an, die Simulation über die Inkremente bzw. die Wartezeiten vorzunehmen.

R Code: Sprungdiffusion

```
> jumpdiffusion<-function(n,sigma,mu,lambda){
+ dt<-1/n;t<-seq(0,1,length=n)
+ L<-c(rep(NA,n));L[1]<-0
+ N<-rpois(1,lambda)
+ T<-runif(N,min=0,max=1)
+ T<-sort(T)
+ jumps<-function(j){ind<-function(j,i){(t[j]>T[i])*(t[j-1]<=T[i])*1}
+ ind<-function(j,i){(t[j]>T[i])*(t[j-1]<=T[i])*1}
+ c<-c(rep(NA,N))
+ for(i in 1:N){
+ c[i]<-ind(j,i)*runif(1,min=-1,max=1)}
+ sum(c)}
+ for(j in 2:n){
+ L[j]<-L[j-1]+sigma*sqrt(dt)*rnorm(1,mean=0,sd=1)+mu*dt
+ +jumps(j)}
+ write.table(L,file="jumpdiffusion.txt")
+ write.table(T,file="jumptimes")
+ plot(L,type="l",main="Diffusion und
+ zusammengesetzter Poisson-Prozess")}
> jumpdiffusion(1000,1,0.1,10)
```


Diffusion und zusammengesetzter Poisson-Prozess
L
0
1
2
3
4
5
0
200
400
600
800
1000
Index

Literatur

Stefano M. Iacus
Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations.
New York: Springer, 3, 2004.

Rama Cont and Peter Tankov
Financial modelling with Jump Processes.
Chapman Hall/CRC, 2, 2008.

David Applebaum
Levy Processes and Stochastic Calculus.
Cambridge University Press, 2, 2005.