Weierstrass Institute for
Applied Analysis and Stochastics

Leibniz Association

Die FWER und Konzepte multivariater Abhängigkeit

Jens Stange

Content

1 Einleitung

2 Einschrittprozeduren

3 Abhängigkeitskonzepte

Multiples Testproblem: $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{H}_m)$

Parametrische Annahme:

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta |\, \vartheta \in \Theta\}, \Theta \subseteq \mathbb{R}^p.$$

Multiples Testproblem: $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{H}_m)$

Parametrische Annahme:

alternativ:

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_{\vartheta,\eta} | \, \vartheta \in \Theta, \eta \in \Xi\}, \Theta \subseteq \mathbb{R}^p.$$

η nuisance Parameter, Abhängigkeitsparameter

Multiples Testproblem: $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{H}_m)$

Parametrische Annahme:

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta | \, \vartheta \in \Theta\}, \Theta \subseteq \mathbb{R}^p.$$

Multiples Testproblem: $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{H}_m)$

Parametrische Annahme:

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta | \, \vartheta \in \Theta\}, \Theta \subseteq \mathbb{R}^p.$$

Hypothesenssystem $\mathcal{H}_m = \{\emptyset \neq H_i \subset \Theta | \, i = 1, \ldots, m\}$

Multiples Testproblem: $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{H}_m)$
Parametrische Annahme:

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta | \, \vartheta \in \Theta\}, \Theta \subseteq \mathbb{R}^p.$$

Hypothesenssystem $\mathcal{H}_m = \{\emptyset \neq H_i \subset \Theta | \, i = 1, \ldots, m\}$
Multipler Test für $\mathcal{H}_m$:

$$\varphi = (\varphi_i)_{i=1,\ldots,m} : \mathcal{X} \to \{0,1\}^m, \text{ messbar.}$$

Multiples Testproblem: $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{H}_m)$

Parametrische Annahme:

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta | \, \vartheta \in \Theta\}, \Theta \subseteq \mathbb{R}^p.$$

Hypothesenssystem $\mathcal{H}_m = \{\emptyset \neq H_i \subset \Theta | \, i = 1, \ldots, m\}$

Multipler Test für $\mathcal{H}_m$:

$$\varphi = (\varphi_i)_{i=1,\ldots,m} : \mathcal{X} \to \{0,1\}^m, \text{ messbar.}$$

mit dem Ziel:

Kontrolle der Familywise Error Rate, das heißt für vorgegebenes $\alpha \in (0,1)$

$$\forall \vartheta \in \Theta : \text{ FWER}_\vartheta(\varphi) = \mathbb{P}_\vartheta \left(\bigcup_{i \in I_0(\vartheta)} \{\varphi_i = 1\} \right) \overset{!}{\leq} \alpha.$$

Warum FWER?

Trotz einiger Nachteile, die überwiegend dem Fluch der Dimension geschuldet sind, gibt es dennoch Gründe FWER-kontrollierende Testprozeduren zu konstruieren:

Warum FWER?

Trotz einiger Nachteile, die überwiegend dem Fluch der Dimension geschuldet sind, gibt es dennoch Gründe FWER-kontrollierende Testprozeduren zu konstruieren:

- Interpretierbarkeit

Warum FWER?

Trotz einiger Nachteile, die überwiegend dem Fluch der Dimension geschuldet sind, gibt es dennoch Gründe FWER-kontrollierende Testprozeduren zu konstruieren:

- Interpretierbarkeit
- bestätigender (confirmatory) Charakter

Trotz einiger Nachteile, die überwiegend dem Fluch der Dimension geschuldet sind, gibt es dennoch Gründe FWER-kontrollierende Testprozeduren zu konstruieren:

- Interpretierbarkeit
- bestätigender (confirmatory) Charakter
- Konservativität

Einschrittprozeduren (single step tests):

Vektor von Teststatistiken

$$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_m) : \mathcal{X} \to S^m$$

messbare Abbildunge, üblicherweise: $S = \mathbb{R}$ oder $S = [0, \infty)$

Vektor von Teststatistiken

$$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_m) : \mathcal{X} \to S^m$$

messbare Abbildunge, üblicherweise: $S = \mathbb{R}$ oder $S = [0, \infty)$

Testentscheidung mithilfe von Ablehnbereichen

$$\Gamma_i \subset S, \; i = 1, \ldots, m$$

üblicherweise: $\Gamma = (c, \infty)$ oder $\Gamma = (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$

$$\varphi_i = \mathbf{I}(T_i \in \Gamma_i), \; i = 1, \ldots, m.$$

Vektor von Teststatistiken

$$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_m) : \mathcal{X} \to S^m$$

messbare Abbildunge, üblicherweise: $S = \mathbb{R}$ oder $S = [0, \infty)$

Testentscheidung mithilfe von Ablehnbereichen

$$\Gamma_i \subset S, \; i = 1, \ldots, m$$

üblicherweise: $\Gamma = (c, \infty)$ oder $\Gamma = (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$

$$\varphi_i = \mathbf{I}(T_i \in \Gamma_i), \; i = 1, \ldots, m.$$

Die Ablehnregionen $\Gamma_i \equiv \Gamma_i(\alpha_{\mathrm{loc,i}})$ seien so gewählt, dass

$$\vartheta \in H_i \Rightarrow \mathbb{P}_\vartheta(\varphi_i = 1) = \mathbb{P}_\vartheta(T_i \in \Gamma_i) \leq \alpha_{\mathrm{loc,i}} \in (0, \alpha].$$

Beispielsweise durch Bonferroni-Korrektur: $\alpha_{\mathrm{loc,i}} = \alpha/m, \; i = 1 \ldots, m.$

Beispiel: Simultane t-Tests im Regressionsmodell

Betrachte für fixes (reguläres) Design $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n,\\ j=1\dots,m}}$ $m < n$ das Regressionsmodell mit homoskedastischem, normalverteiltem Fehler $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1,\dots,n} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

mit unbekannten Regressionsparametern $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$

Betrachte für fixes (reguläres) Design $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n,\\ j=1\dots,m}}$ $m < n$ das Regressionsmodell mit homoskedastischem, normalverteiltem Fehler $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1,\dots,n} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

mit unbekannten Regressionsparametern $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$

Simultanes Testen auf signifikanten Einfluß der einzelnen Regressionsparameter:

$$\mathcal{H}_m = \{H_j = \{\beta_j = 0\} |\, j = 1, \dots, m\}$$

Beispiel: Simultane t-Tests im Regressionsmodell

Betrachte für fixes (reguläres) Design $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n,\\ j=1\ldots,m}}$ $m < n$ das Regressionsmodell mit homoskedastischem, normalverteiltem Fehler $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1,\ldots,n} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

mit unbekannten Regressionsparametern $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$
Simultanes Testen auf signifikanten Einfluß der einzelnen Regressionsparameter:

$$\mathcal{H}_m = \{H_j = \{\beta_j = 0\} \mid j = 1, \ldots, m\}$$

Vektor von Teststatistiken: $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_m)$ gegeben durch:

$$T_j := \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{S}},\ j = 1, \ldots, m$$

Betrachte für fixes (reguläres) Design $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n,\\ j=1\dots,m}}$ $m < n$ das Regressionsmodell mit homoskedastischem, normalverteiltem Fehler $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1,\dots,n} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

mit unbekannten Regressionsparametern $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$
Simultanes Testen auf signifikanten Einfluß der einzelnen Regressionsparameter:

$$\mathcal{H}_m = \{H_j = \{\beta_j = 0\} \mid j = 1, \dots, m\}$$

Vektor von Teststatistiken: $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_m)$ gegeben durch:

$$T_j := \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{S}},\; j = 1, \dots, m$$

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y \sim \mathcal{N}_m(\beta, \sigma^2 (X^\top X)^{-1})$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (X\hat{\beta})_i)^2,$$

Betrachte für fixes (reguläres) Design $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n,\\ j=1\dots,m}}$ $m < n$ das Regressionsmodell mit homoskedastischem, normalverteiltem Fehler $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1,\dots,n} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

mit unbekannten Regressionsparametern $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$
Simultanes Testen auf signifikanten Einfluß der einzelnen Regressionsparameter:

$$\mathcal{H}_m = \{H_j = \{\beta_j = 0\} | \, j = 1, \dots, m\}$$

Vektor von Teststatistiken: $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_m)$ gegeben durch:

$$T_j := \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{S}}, \; j = 1, \dots, m$$

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y \sim \mathcal{N}_m(\beta, \sigma^2 (X^\top X)^{-1})$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (X\hat{\beta})_i)^2, \; \frac{(n-m)}{(X^\top X)^{-1}_{jj} \sigma^2} \hat{S}^2 \sim \chi^2_{n-m}.$$

Betrachte für fixes (reguläres) Design $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n,\\ j=1\dots,m}}$ $m < n$ das Regressionsmodell mit homoskedastischem, normalverteiltem Fehler $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1,\dots,n} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

mit unbekannten Regressionsparametern $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_m) \in \mathbb{R}^m$
Simultanes Testen auf signifikanten Einfluß der einzelnen Regressionsparameter:

$$\mathcal{H}_m = \{H_j = \{\beta_j = 0\} \mid j = 1,\dots,m\}$$

Vektor von Teststatistiken: $\mathbf{T} = (T_1,\dots,T_m)$ gegeben durch:

$$T_j := \frac{\hat\beta_j}{\hat S},\ j = 1,\dots,m$$

$$\hat\beta = (X^\top X)^{-1}X^\top Y \sim \mathcal{N}_m(\beta,\sigma^2(X^\top X)^{-1}) \Rightarrow \hat\beta_j \overset{H_j}{\sim} \mathcal{N}(0,\sigma^2(X^\top X)^{-1}_{jj})$$

$$\hat S^2 = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^n (Y_i - (X\hat\beta)_i)^2,\ \frac{(n-m)}{(X^\top X)^{-1}_{jj}\sigma^2}\hat S^2 \sim \chi^2_{n-m}.$$

Betrachte für fixes (reguläres) Design $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n,\\ j=1\ldots,m}}$ $m < n$ das Regressionsmodell mit homoskedastischem, normalverteiltem Fehler $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1,\ldots,n} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

mit unbekannten Regressionsparametern $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$
Simultanes Testen auf signifikanten Einfluß der einzelnen Regressionsparameter:

$$\mathcal{H}_m = \{H_j = \{\beta_j = 0\} |\, j = 1, \ldots, m\}$$

Vektor von Teststatistiken: $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_m)$ gegeben durch:

$$T_j := \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{S}} \overset{H_j}{\sim} t_{n-m}, \; j = 1, \ldots, m$$

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y \sim \mathcal{N}_m(\beta, \sigma^2 (X^\top X)^{-1}) \Rightarrow \hat{\beta}_j \overset{H_j}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2 (X^\top X)^{-1}_{jj})$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (X\hat{\beta})_i)^2, \; \frac{(n-m)}{(X^\top X)^{-1}_{jj} \sigma^2} \hat{S}^2 \sim \chi^2_{n-m}.$$

Gemeinsame Verteilung?

Sei $H_{\text{glob}} = \bigcap_{j=1}^{m} H_j = \{\beta = 0\}$ die Globalhypothese, dann gilt

$$\hat{\beta} \overset{H_{\text{glob}}}{\sim} \mathcal{N}_m(0, \sigma^2 (X^\top X)^{-1})$$

Für die Standardabweichung verwende nun

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2} \hat{S}'^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

Dann gilt für $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_m),\ T_j := \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{S}'}$

$$\mathbf{T} \overset{H_{\text{glob}}}{\sim} t_m(n-1, (X^\top X)^{-1})$$

Sei $H_{\text{glob}} = \bigcap_{j=1}^{m} H_j = \{\beta = 0\}$ die Globalhypothese, dann gilt

$$\hat{\beta} \overset{H_{\text{glob}}}{\sim} \mathcal{N}_m(0, \sigma^2 (X^\top X)^{-1})$$

Für die Standardabweichung verwende nun

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2} \hat{S}'^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

Dann gilt für $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_m),\ T_j := \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{S}'}$

$$\mathbf{T} \overset{H_{\text{glob}}}{\sim} t_m(n-1, (X^\top X)^{-1})$$

Kontrolle der FWER?

$$\forall \beta \in \mathbb{R}^m : \mathbb{P}_\beta \left(\bigcup_{i \in I_0(\beta)} \{T_i \in \Gamma_i\} \right) \leq \alpha.$$

Forderung

Die Abhängigkeitsstruktur der Teststatistiken ist gegenüber dem Wahrheitsgehalt der Hypothesen invariant.

Forderung

Die Abhängigkeitsstruktur der Teststatistiken ist gegenüber dem Wahrheitsgehalt der Hypothesen invariant.

Formal fordern wir die Existenz eines Elementes $\vartheta^* \in H_{\text{glob}}$, so dass

$$\forall \vartheta \in \Theta : \mathbb{P}_\vartheta \left(\bigcup_{i \in I_0(\vartheta)} \{T_i \in \Gamma\} \right) = \mathbb{P}_{\vartheta^*} \left(\bigcup_{i \in I_0(\vartheta)} \{T_i \in \Gamma\} \right).$$

Forderung

Die Abhängigkeitsstruktur der Teststatistiken ist gegenüber dem Wahrheitsgehalt der Hypothesen invariant.

Formal fordern wir die Existenz eines Elementes $\vartheta^* \in H_{\text{glob}}$, so dass

$$\forall \vartheta \in \Theta : \mathbb{P}_\vartheta \left(\bigcup_{i \in I_0(\vartheta)} \{T_i \in \Gamma\} \right) = \mathbb{P}_{\vartheta^*} \left(\bigcup_{i \in I_0(\vartheta)} \{T_i \in \Gamma\} \right).$$

Damit können unter der Globalhypothese Ablehnregionen $(\Gamma_i(\alpha))_{i=1}^m$ bestimmt werden, so dass Kontrolle der FWER garantiert ist:

$$\forall \vartheta \in \Theta : \text{FWER}_\vartheta(\varphi) \leq 1 - \mathbb{P}_{\vartheta^*}(T_1 \notin \Gamma_1(\alpha), \ldots, T_m \notin \Gamma_m(\alpha)) \stackrel{!}{=} \alpha.$$

Forderung

Die Abhängigkeitsstruktur der Teststatistiken ist gegenüber dem Wahrheitsgehalt der Hypothesen invariant.

Formal fordern wir die Existenz eines Elementes $\vartheta^* \in H_{\mathrm{glob}}$, so dass

$$\forall \vartheta \in \Theta : \mathbb{P}_\vartheta \left(\bigcup_{i \in I_0(\vartheta)} \{T_i \in \Gamma\} \right) = \mathbb{P}_{\vartheta^*} \left(\bigcup_{i \in I_0(\vartheta)} \{T_i \in \Gamma\} \right).$$

Damit können unter der Globalhypothese Ablehnregionen $(\Gamma_i(\alpha))_{i=1}^m$ bestimmt werden, so dass Kontrolle der FWER garantiert ist:

$$\forall \vartheta \in \Theta : \text{FWER}_\vartheta(\varphi) \leq 1 - \mathbb{P}_{\vartheta^*}(T_1 \notin \Gamma_1(\alpha), \ldots, T_m \notin \Gamma_m(\alpha)) \overset{!}{\leq} \alpha.$$

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen

$$\text{cov}(X, Y) := \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

Pearson's Produktmomentenkorrelation und misst genau den Grad der linearen stochastischen Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen.

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen

$$\text{cov}(X,Y) := \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

Pearson's Produktmomentenkorrelation und misst genau den Grad der linearen stochastischen Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen.

Beispiel

Multivariate Normalverteilungen verfügen über lineare Abhängkeitsstruktur.
Seien, X und ε unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen und definiere

$$Y := aX + \varepsilon$$

für ein $a \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$$Y \sim \mathcal{N}(0, 1 + a^2) \text{ und } \text{cov}(X,Y) = a$$

Verallgemeinerung auf den multivariaten Fall

mittels Linearkombinationen von Vektoren:

Kovarianzmatrix: $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch, positiv definit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^p$

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m) \sim \mathcal{N}_m(\mu, \Sigma)$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^m \langle X, v \rangle \sim \mathcal{N}(\langle \mu, v \rangle, \langle \Sigma v, v \rangle).$$

mittels Linearkombinationen von Vektoren:

Kovarianzmatrix: $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch, positiv definit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^p$

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m) \sim \mathcal{N}_m(\mu, \Sigma)$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^m \langle X, v\rangle \sim \mathcal{N}(\langle \mu, v\rangle, \langle \Sigma v, v\rangle).$$

$$\Rightarrow \text{cov}(X_i, X_j) = (\Sigma)_{ij}$$

Lässt sich immer auf Unabhängigkeit zurückführen:

$$\mathbf{X} \overset{d}{=} \mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z},\ \mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_m) \sim \mathcal{N}_m(0, I_m).$$

mittels Linearkombinationen von Vektoren:

Kovarianzmatrix: $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symmetrisch, positiv definit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^p$

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m) \sim \mathcal{N}_m(\mu, \Sigma)$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^m \langle X, v\rangle \sim \mathcal{N}(\langle \mu, v\rangle, \langle \Sigma v, v\rangle).$$

$$\Rightarrow \text{cov}(X_i, X_j) = (\Sigma)_{ij}$$

Lässt sich immer auf Unabhängigkeit zurückführen:

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_m) \sim \mathcal{N}_m(0, I_m).$$

Begrenztes Konzept, denn z.B. für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ gilt

$$\text{cov}(X, X^2) = \mathbb{E}[X^3] = 0.$$

- Kendall's τ

  Für zwei Zufallsvariablen X, Y seien X' und Y' jeweils unabhängige Kopien

$$\tau(X,Y) = \mathbb{P}(\{X > X'\} \cap \{Y > Y'\}) - \mathbb{P}(\{X < X'\} \cap \{Y > Y'\})$$

  Differenz der Wahrscheinlichkeit des Auftretens konkordanter bzw. diskordante Paare.

- Kendall's τ

  Für zwei Zufallsvariablen X, Y seien X' und Y' jeweils unabhängige Kopien

$$\tau(X,Y) = \mathbb{P}(\{X > X'\} \cap \{Y > Y'\}) - \mathbb{P}(\{X < X'\} \cap \{Y > Y'\})$$

  Differenz der Wahrscheinlichkeit des Auftretens konkordanter bzw. diskordante Paare.

- Spearman's ρ

  Seien $X \sim F_X$ und $Y \sim F_Y$ mit jeweilgen Verteilungsfunktionen:

$$\rho(X,Y) = \text{cov}(F_X(X), F_Y(Y)).$$

- Kendall's τ

  Für zwei Zufallsvariablen X, Y seien X' und Y' jeweils unabhängige Kopien

$$\tau(X,Y) = \mathbb{P}(\{X > X'\} \cap \{Y > Y'\}) - \mathbb{P}(\{X < X'\} \cap \{Y > Y'\})$$

  Differenz der Wahrscheinlichkeit des Auftretens konkordanter bzw. diskordante Paare.

- Spearman's ρ

  Seien $X \sim F_X$ und $Y \sim F_Y$ mit jeweilgen Verteilungsfunktionen:

$$\rho(X,Y) = \text{cov}(F_X(X), F_Y(Y)).$$

- tail dependence

  upper tail dependence: $\lambda_U : \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(Y > x | \, X > x)$.

  lower tail dependence: $\lambda_L : \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(Y \leq x | \, X \leq x)$.

- Kendall's τ

  Für zwei Zufallsvariablen X, Y seien X' und Y' jeweils unabhängige Kopien

  $$\tau(X,Y) = \mathbb{P}(\{X > X'\} \cap \{Y > Y'\}) - \mathbb{P}(\{X < X'\} \cap \{Y > Y'\})$$

  Differenz der Wahrscheinlichkeit des Auftretens konkordanter bzw. diskordante Paare.

- Spearman's ρ

  Seien $X \sim F_X$ und $Y \sim F_Y$ mit jeweilgen Verteilungsfunktionen:

  $$\rho(X,Y) = \text{cov}(F_X(X), F_Y(Y)).$$

- tail dependence

  upper tail dependence: $\lambda_U : \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(Y > x |\, X > x)$.

  lower tail dependence: $\lambda_L : \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(Y \leq x |\, X \leq x)$.

- Copulas

  mehrdimensionale Verteilungsfunktionen mit uniformen Randverteilungen.

Einfachstes Abhängigkeitskonzept?

Einfachstes Abhängigkeitskonzept

Unabhängigkeit:

Bestimmung der Ablehnbereiche $\Gamma_i \equiv \Gamma_i(\alpha_{\mathrm{loc}}),\ i = 1, \ldots, m$ mit Šidák-Korrektur:

$$\alpha_{\mathrm{loc}} = 1 - (1 - \alpha)^{1/m}.$$

also

$$\vartheta \in H_i : \mathbb{P}_\vartheta(\varphi = 1) = \mathbb{P}_\vartheta(T_i \notin \Gamma_i) = 1 - (1 - \alpha)^{1/m}$$

Einfachstes Abhängigkeitskonzept

Unabhängigkeit:

Bestimmung der Ablehnbereiche $\Gamma_i \equiv \Gamma_i(\alpha_{\mathrm{loc}}),\ i = 1, \ldots, m$ mit Šidák-Korrektur:

$$\alpha_{\mathrm{loc}} = 1 - (1-\alpha)^{1/m}.$$

also

$$\vartheta \in H_i : \mathbb{P}_\vartheta(\varphi = 1) = \mathbb{P}_\vartheta(T_i \notin \Gamma_i) = 1 - (1-\alpha)^{1/m}$$

$$\forall \vartheta \in \Theta : \text{FWER}_\vartheta(\varphi) \leq 1 - \mathbb{P}_{\vartheta^*}\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{T_i \notin \Gamma_i\}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}_{\vartheta^*}(T_i \notin \Gamma_i) = \alpha.$$

Einfachstes Abhängigkeitskonzept

Unabhängigkeit:

Bestimmung der Ablehnbereiche $\Gamma_i \equiv \Gamma_i(\alpha_{\text{loc}}),\ i = 1, \ldots, m$ mit Šidák-Korrektur:

$$\alpha_{\text{loc}} = 1 - (1 - \alpha)^{1/m}.$$

also

$$\vartheta \in H_i : \mathbb{P}_\vartheta(\varphi = 1) = \mathbb{P}_\vartheta(T_i \notin \Gamma_i) = 1 - (1 - \alpha)^{1/m}$$

$$\forall \vartheta \in \Theta : \text{FWER}_\vartheta(\varphi) \leq 1 - \mathbb{P}_{\vartheta^*}\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{T_i \notin \Gamma_i\}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}_{\vartheta^*}(T_i \notin \Gamma_i) = \alpha.$$

Qualitative Abhängigkeitskonzepte zielen auf $\mathbb{P}_{\vartheta^*}\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{T_i \notin \Gamma_i\}\right)$.

Es können die folgenden Konzepte unterschieden werden:

1. positive quadrant dependent –PQD (Positiv Quadrantenabhängig)
2. stochastically increasing– SI, or positive regression dependent–PRD (stochastisch wachsend)
3. right-tail increasing –RTI, left-tail decreasing –LTD
4. association –A
5. total positivity of order 2 –TP_2

Es können die folgenden Konzepte unterschieden werden:

1. positive quadrant dependent –PQD (Positiv Quadrantenabhängig)
2. stochastically increasing– SI, or positive regression dependent–PRD (stochastisch wachsend)
3. right-tail increasing –RTI, left-tail decreasing –LTD
4. association –A
5. total positivity of order 2 –TP_2

Im folgenden werden jeweils ein Paar $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ reellwertiger Zufallsvariablen auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ betrachtet.

Ein Paar $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ heißt positive quadrant dependent, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) \geq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

bzw. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(\{X > x\} \cap \{Y > y\}) \geq \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y).$$

Ein Paar $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ heißt positive quadrant dependent, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) \geq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

bzw. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(\{X > x\} \cap \{Y > y\}) \geq \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y).$$

Y heißt stochastisch wachsend in X falls für alle $y \in \mathbb{R}$ die Funktion $t_y : \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeben durch

$$t_y(x) := \mathbb{P}(Y > y | \, X = x), \; x \in \mathbb{R}$$

monoton wachsend ist.

RTI und LTD

Y heißt right-tail increasing in X, falls für alle $y \in \mathbb{R}$ die Funktion $rt_y : \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeben durch

$$rt_y(x) := \mathbb{P}(Y > y | \, X > x), \; x \in \mathbb{R}$$

monoton wachsend ist.

Y heißt right-tail increasing in X, falls für alle $y \in \mathbb{R}$ die Funktion $rt_y : \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeben durch

$$rt_y(x) := \mathbb{P}(Y > y | \, X > x), \; x \in \mathbb{R}$$

monoton wachsend ist.

In ähnlicher Form: Y heißt left-tail decreasing in X, falls für alle $y \in \mathbb{R}$ die Funktion $lt_y : \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeben durch

$$lt_y(x) := \mathbb{P}(Y \leq y | \, X \leq x), \; x \in \mathbb{R}$$

monoton fallend ist.

Ein Paar Zufallsvariablen $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ werden als Associated bezeichnet falls für alle (komponentenweise) wachsenden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to R$ gilt

$$\mathbb{E}[f(X,Y)g(X,Y)] \geq \mathbb{E}[f(X,Y)]\mathbb{E}[g(X,Y)]$$
$$\iff \text{cov}(f(X,Y), g(X,Y)) \geq 0.$$

Ein Paar Zufallsvariablen $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ werden als Associated bezeichnet falls für alle (komponentenweise) wachsenden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to R$ gilt

$$\mathbb{E}[f(X,Y)g(X,Y)] \geq \mathbb{E}[f(X,Y)]\mathbb{E}[g(X,Y)]$$
$$\iff \text{cov}(f(X,Y), g(X,Y)) \geq 0.$$

Auch als FKG-inequality (nach Fortuin-Kasteleyn-Ginibre, 1971) oder Korrelationsungleichung in der Quantenphysik bekannt.

A und TP_2

Ein Paar Zufallsvariablen $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ werden als Associated bezeichnet falls für alle (komponentenweise) wachsenden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to R$ gilt

$$\mathbb{E}[f(X,Y)g(X,Y)] \geq \mathbb{E}[f(X,Y)]\mathbb{E}[g(X,Y)]$$
$$\iff \text{cov}(f(X,Y), g(X,Y)) \geq 0.$$

Auch als FKG-inequality (nach Fortuin-Kasteleyn-Ginibre, 1971) oder Korrelationsungleichung in der Quantenphysik bekannt.

Ein Paar $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ heißt total positiv der Ordnung 2 (TP_2), falls die entsprechende Lebesguedichte $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ TP_2 ist, also es gilt

$$\forall a_1 < b_1, a_2 < b_2 : \; f(a_1, a_2)f(b_1, b_2) \geq f(a_1, b_2)f(b_1, a_2).$$

Bezeichne für $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} := (\max(x_1, y_1), \max(x_2, y_2))$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} := (\min(x_1, y_1), \min(x_2, y_2))$$

das komponentenweise Maximum bzw. Minimum.
Betrachte zu einer $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ die Matrizen

$$A_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{pmatrix} f(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) & f(\mathbf{x}) \\ f(\mathbf{y}) & f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$$

Dann kann man auch umformulieren:
Eine positive Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ ist TP_2, falls für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$:

$$\det(A_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) f(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) f(\mathbf{y}) \geq 0$$

Theorem

Die Konzepte PQD, SI, RTI, LTD, A und TP$_2$ sind invariant gegenüber streng monoton wachsenden Transformationen der Komponenten.

Das heißt z.B. falls (X, Y) PQD ist, so ist auch $(t_1(X), t_2(Y))$ PQD, falls $t_1, t_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng mononton wachsend sind.

Theorem

Die Konzepte PQD, SI, RTI, LTD, A und TP_2 sind invariant gegenüber streng monoton wachsenden Transformationen der Komponenten.

Das heißt z.B. falls (X, Y) PQD ist, so ist auch $(t_1(X), t_2(Y))$ PQD, falls $t_1, t_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng mononton wachsend sind.

Theorem (Hierarchie der Abhängigkeitskonzepte)

- $TP_2 \Longrightarrow SI \Longrightarrow RTI \text{ und } LTD$.
- $RTI \text{ oder } LTD \Longrightarrow A \Longrightarrow PQD$

Sei $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Paar Zufallsvariablen mit einer TP$_2$-Lebesguedichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Es ist zu zeigen:

$$x < x' \Rightarrow \mathbb{P}(Y > y | \, X = x) \leq \mathbb{P}(Y > y | \, X = x').$$

Sei $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Paar Zufallsvariablen mit einer TP_2-Lebesguedichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Es ist zu zeigen:

$$x < x' \Rightarrow \mathbb{P}(Y > y |\, X = x) \leq \mathbb{P}(Y > y |\, X = x').$$

Definiere $f^X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$ (Randdichte) und $f^{Y|x}(y) := f(x, y)/f^X(x)$ (bedingte Dichte)

Beweis: $\text{TP}_2 \Rightarrow$ SI

Sei $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Paar Zufallsvariablen mit einer TP_2-Lebesguedichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es ist zu zeigen:

$$x < x' \Rightarrow \mathbb{P}(Y > y|\, X = x) \leq \mathbb{P}(Y > y|\, X = x').$$

Definiere $f^X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$ (Randdichte) und $f^{Y|x}(y) := f(x, y)/f^X(x)$ (bedingte Dichte)

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y > y|\, X = x') - \mathbb{P}(Y > y|\, X = x) \\ &= \int_{y}^{\infty} f^{Y|x'}(z) - f^{Y|x}(z)\, dz \end{aligned}$$

Sei $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Paar Zufallsvariablen mit einer TP$_2$-Lebesguedichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Es ist zu zeigen:

$$x < x' \Rightarrow \mathbb{P}(Y > y \mid X = x) \leq \mathbb{P}(Y > y \mid X = x').$$

Definiere $f^X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ (Randdichte) und $f^{Y|x}(y) := f(x,y)/f^X(x)$ (bedingte Dichte)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y > y \mid X = x') - \mathbb{P}(Y > y \mid X = x) \\
&= \int_y^{\infty} f^{Y|x'}(z) - f^{Y|x}(z)\,dz \\
&= f^X(x) f^X(x') \int_y^{\infty} f^X(x) f(x', z) - f^X(x') f(x, z)\,dz
\end{aligned}$$

Sei $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Paar Zufallsvariablen mit einer TP$_2$-Lebesguedichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es ist zu zeigen:

$$x < x' \Rightarrow \mathbb{P}(Y > y | \, X = x) \leq \mathbb{P}(Y > y | \, X = x').$$

Definiere $f^X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$ (Randdichte) und $f^{Y|x}(y) := f(x, y)/f^X(x)$ (bedingte Dichte)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y > y | \, X = x') - \mathbb{P}(Y > y | \, X = x) \\
&= \int\limits_{y}^{\infty} f^{Y|x'}(z) - f^{Y|x}(z)\, dz \\
&= f^X(x) f^X(x') \int\limits_{y}^{\infty} f^X(x) f(x', z) - f^X(x') f(x, z)\, dz \\
&= f^X(x) f^X(x') \int\limits_{y}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, w) f(x', z) - f(x', w) f(x, z)\, dw\, dz
\end{aligned}$$

Sei $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Paar Zufallsvariablen mit einer TP$_2$-Lebesguedichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Es ist zu zeigen:

$$x < x' \Rightarrow \mathbb{P}(Y > y|\, X = x) \leq \mathbb{P}(Y > y|\, X = x').$$

Definiere $f^X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ (Randdichte) und $f^{Y|x}(y) := f(x,y)/f^X(x)$ (bedingte Dichte)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y > y|\, X = x') - \mathbb{P}(Y > y|\, X = x) \\
&= \int\limits_y^{\infty} f^{Y|x'}(z) - f^{Y|x}(z)\,dz \\
&= f^X(x) f^X(x') \int\limits_y^{\infty} f^X(x) f(x',z) - f^X(x') f(x,z)\,dz \\
&= f^X(x) f^X(x') \int\limits_y^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x,w) f(x',z) - f(x',w) f(x,z)\,dw\,dz
\end{aligned}$$

Sei $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Paar Zufallsvariablen mit einer TP$_2$-Lebesguedichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Es ist zu zeigen:

$$x < x' \Rightarrow \mathbb{P}(Y > y|\, X = x) \leq \mathbb{P}(Y > y|\, X = x').$$

Definiere $f^X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$ (Randdichte) und $f^{Y|x}(y) := f(x, y)/f^X(x)$ (bedingte Dichte)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y > y|\, X = x') - \mathbb{P}(Y > y|\, X = x) \\
&= \int\limits_y^{\infty} f^{Y|x'}(z) - f^{Y|x}(z)\, dz \\
&= f^X(x) f^X(x') \int\limits_y^{\infty} f^X(x) f(x', z) - f^X(x') f(x, z)\, dz \\
&= f^X(x) f^X(x') \int\limits_y^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x, w) f(x', z) - f(x', w) f(x, z)\, dw\, dz \geq 0.
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir einige Erweiterungen für höher dimensionale Zufallsvektoren

$$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m, \ m > 2,$$

definiert auf geeignetem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Nun betrachten wir einige Erweiterungen für höher dimensionale Zufallsvektoren

$$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m,\ m > 2,$$

definiert auf geeignetem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\mathbf{T}$ heißt

- positive lower orthant dependent (PLOD), falls für alle $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{T_i \leq t_i\}\right) \geq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}\left(T_i \leq t_i\right).$$

- positive upper orthant dependent (PUOD) , falls für alle $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{T_i > t_i\}\right) \geq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}\left(T_i > t_i\right).$$

Falls PLOD und PUOD zutreffen so heißt $\mathbf{T}$ positive orthant dependent (POD)

$\mathbf{T}$ heißt

- (Multivariate) associated, falls

$$\mathbb{E}[g(\mathbf{T})h(\mathbf{T})] \geq \mathbb{E}[g(\mathbf{T})]\mathbb{E}[h(\mathbf{T})]$$

  für alle (komponentenweise) wachsenden Funktionen $g, h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

- Multivariate totally positive of order 2 (MTP$_2$), falls die entsprechende Lebesguedichte $f : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \; f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) f(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) f(\mathbf{y}).$$

  erfüllt.

Bezeichne die Ereignisse:

$$O_i := \{\varphi_i = 0\} = \{T_i \notin \Gamma_i\},\ i = 1, \ldots, m,$$

die zur Annahme der Nullhypothese führen.

Falls ein Vektor von Teststatistiken $\mathbf{T}$ MTP_2 ist, so gilt für alle $2 \leq k \leq m$

$$\mathbb{P}_{\vartheta^*}(O_i | O_{i-1}, \ldots, O_1) \geq \mathbb{P}_{\vartheta^*}(O_i | O_{i-1}, \ldots, O_{i-k+1}), i \geq k$$

Bezeichne die Ereignisse:

$$O_i := \{\varphi_i = 0\} = \{T_i \notin \Gamma_i\},\ i = 1, \dots, m,$$

die zur Annahme der Nullhypothese führen.
Falls ein Vektor von Teststatistiken $\mathbf{T}$ MTP$_2$ ist, so gilt für alle $2 \leq k \leq m$

$$\mathbb{P}_{\vartheta^*}(O_i | O_{i-1}, \dots, O_1) \geq \mathbb{P}_{\vartheta^*}(O_i | O_{i-1}, \dots, O_{i-k+1}), i \geq k$$

Und damit für fixes k:

$$\mathbb{P}_{\vartheta^*}\left(\bigcap_{i=1}^{m} O_i\right) \geq \mathbb{P}_{\vartheta^*}(O_1, \dots, O_k) \prod_{i=k}^{m} \mathbb{P}_{\vartheta^*}\left(O_i | \, O_{i-1}, \dots, O_{i-k+1}\right) =: \beta_k$$

Für globales Signifikanzniveau $\alpha \in (0,1)$ seien die Ablehnregionen $\Gamma_i \equiv \Gamma_i(\alpha)$ so gewählt, dass für Ereignisse $O_i \equiv O_i(\alpha)$ gilt:

$$\beta_k = 1 - \alpha$$

Mithilfe der Annahme für Einschrittprozeduren also:

$$\forall \vartheta \in \Theta: \ \text{FWER}_\vartheta(\varphi) \leq 1 - \beta_k = \alpha$$

Für globales Signifikanzniveau $\alpha \in (0,1)$ seien die Ablehnregionen $\Gamma_i \equiv \Gamma_i(\alpha)$ so gewählt, dass für Ereignisse $O_i \equiv O_i(\alpha)$ gilt:

$$\beta_k = 1 - \alpha$$

Mithilfe der Annahme für Einschrittprozeduren also:

$$\forall \vartheta \in \Theta : \text{ FWER}_\vartheta(\varphi) \leq 1 - \beta_k = \alpha$$

Lokale Signifikanzniveaus: $\alpha_{\mathrm{loc,i}} = \mathbb{P}_{\vartheta^*}(T_i \in \Gamma_i)$
Eine effektive Anzahl an Tests im Šidák-Korrekturformat ergibt sich implizit als Lösung der Gleichung:

$$1 - (1-\alpha)^{m_{\mathrm{eff}}} \stackrel{!}{=} 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - \alpha_{\mathrm{loc,i}}).$$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.

Literaturhinweis:

Harry Joe: ”Multivariate models and dependence concepts“, Chapman Hall 1997