

Einladung zum Gasperspiel

Eva-Maria Feichtner

Geister wie Abälard, wie Leibniz, wie Hegel haben den Traum ohne Zweifel gekannt, das geistige Universum in konzentrische Systeme einzufangen und die lebendige Schönheit des Geistigen und der Kunst mit der magischen Formulierkraft der exakten Disziplinen zu vereinigen.

Hermann Hesse: *Das Glasperlenspiel*
Fretz & Wasmuth, Zürich, 1943.

Polytope

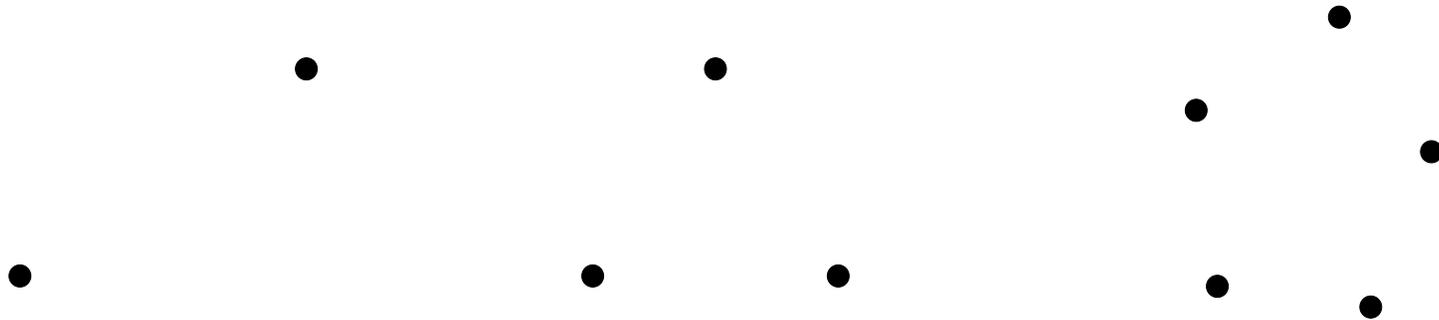


Das **Polytop** gegeben durch die Punkte P_1, \dots, P_n ist das kleinste Objekt im Raum, das die Punkte P_1, \dots, P_n und mit je zwei Punkten auch ihre Verbindungsstrecke enthält.

Polytope

Das **Polytop** gegeben durch die Punkte P_1, \dots, P_n ist das kleinste Objekt im Raum, das die Punkte P_1, \dots, P_n und mit je zwei Punkten auch ihre Verbindungsstrecke enthält.

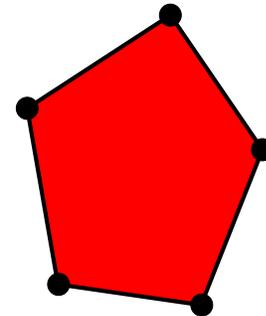
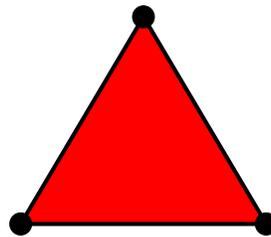
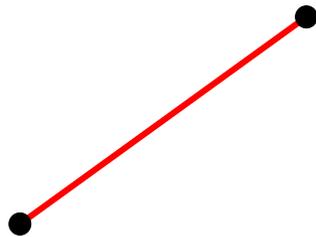
Dimension 2:



Polytope

Das **Polytop** gegeben durch die Punkte P_1, \dots, P_n ist das kleinste Objekt im Raum, das die Punkte P_1, \dots, P_n und mit je zwei Punkten auch ihre Verbindungsstrecke enthält.

Dimension 2:



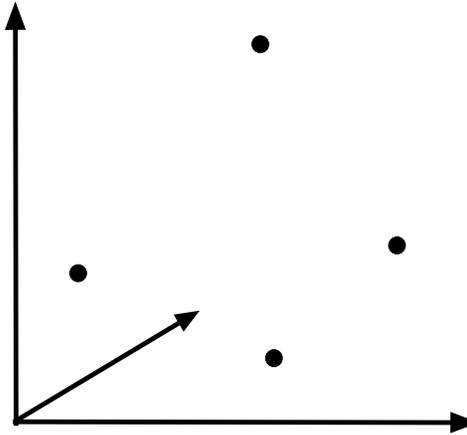
Polytope

Dimension 3:



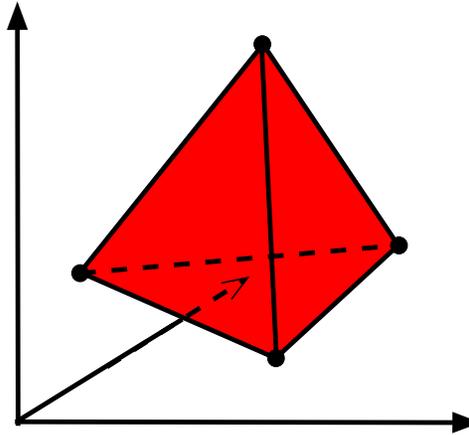
Polytope

Dimension 3:



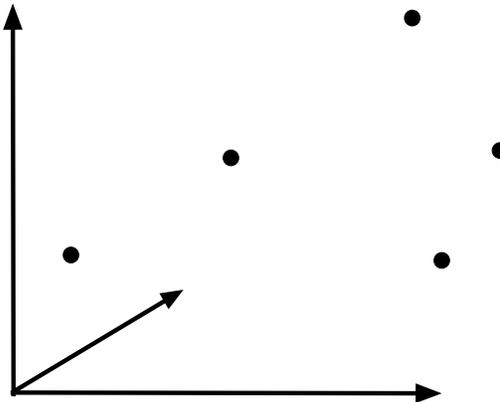
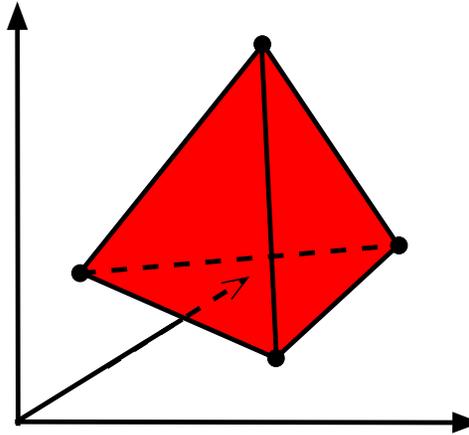
Polytope

Dimension 3:



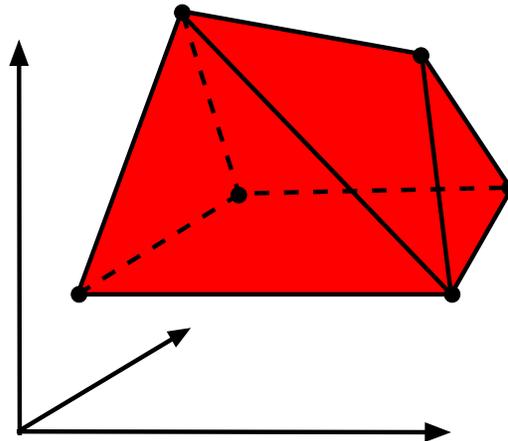
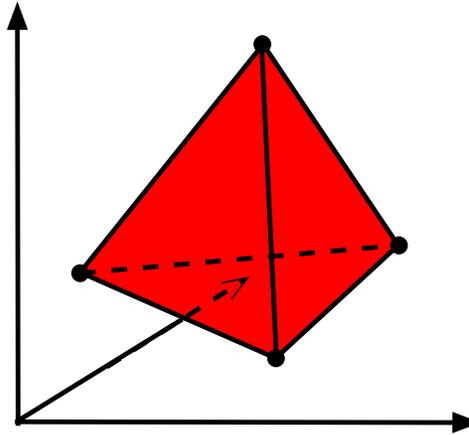
Polytope

Dimension 3:



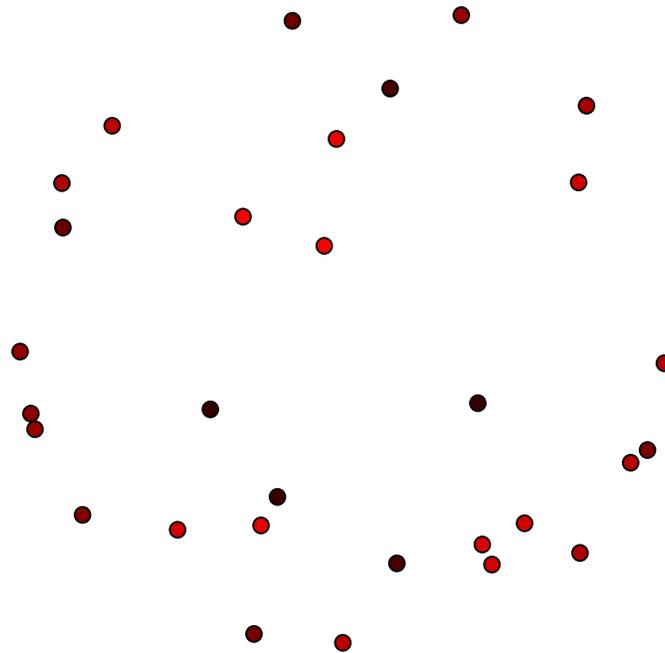
Polytope

Dimension 3:



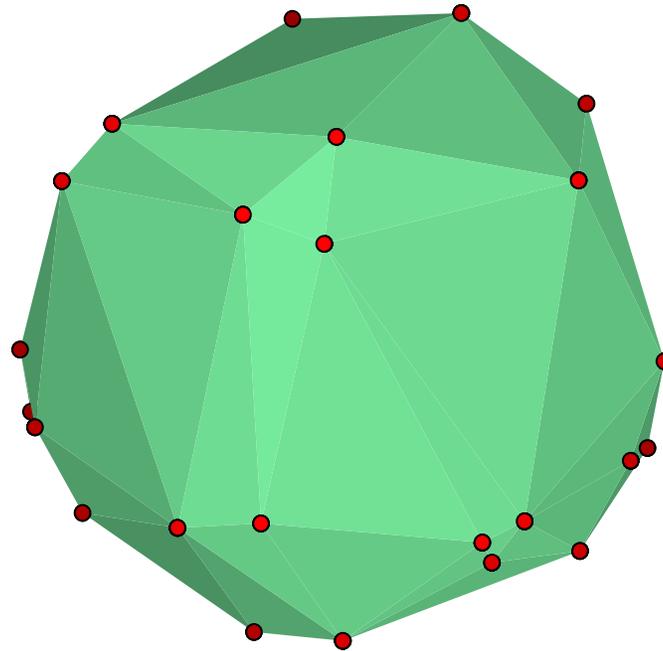
Polytope

Man kann sie dem Zufall überlassen ...



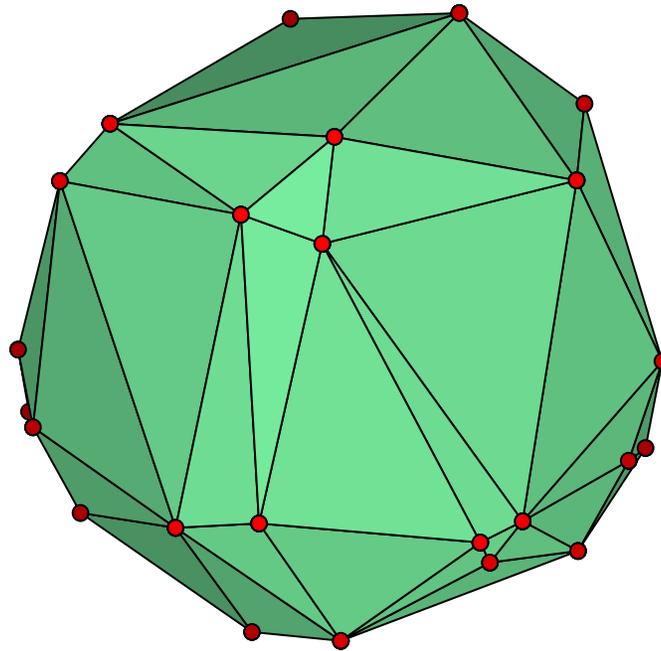
Polytope

Man kann sie dem Zufall überlassen ...



Polytope

Man kann sie dem Zufall überlassen ...

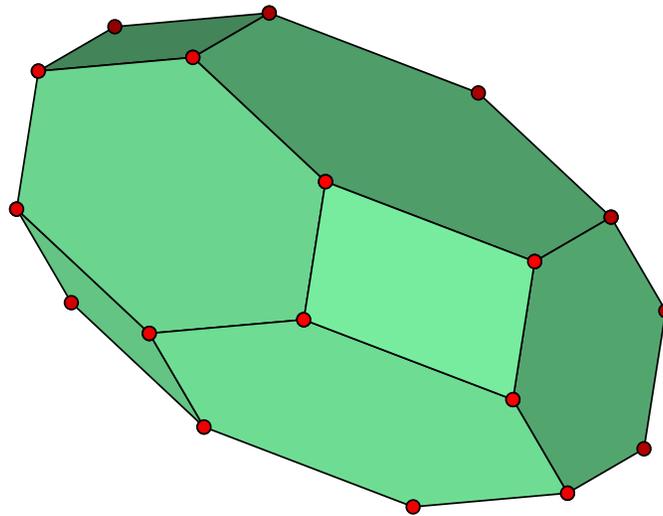


Polytope

... oder systematisch konstruieren:

$$\Pi_{d-1} = \text{conv}\{(\sigma(1), \dots, \sigma(d)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_d\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

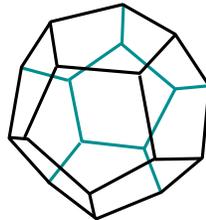
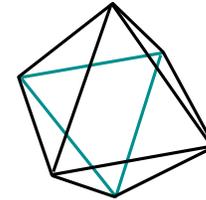
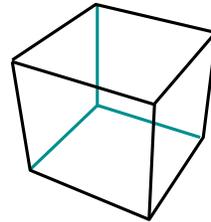
PERMUTAEDER



Π_3

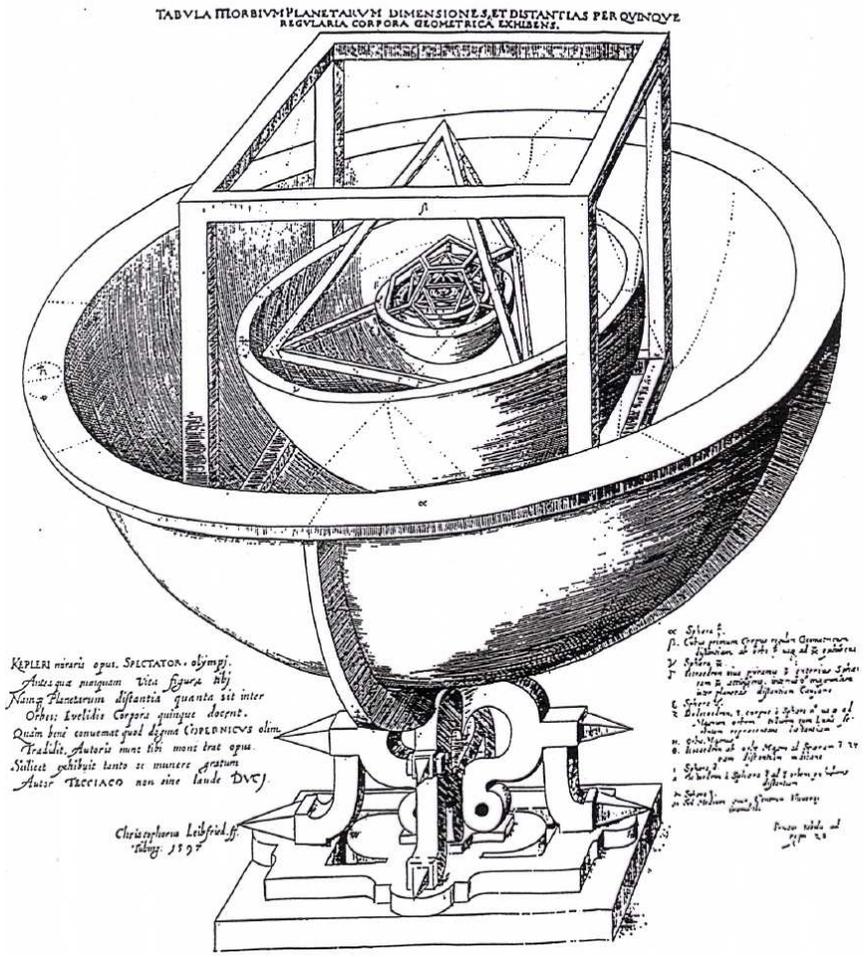
Kleine Kulturgeschichte der Polytope

Platonische Körper



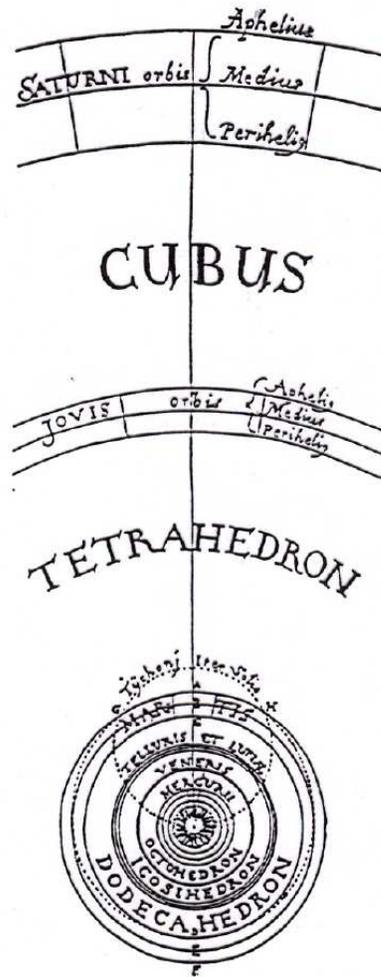
3. Jhdt v. Chr.

Kleine Kulturgeschichte der Polytope



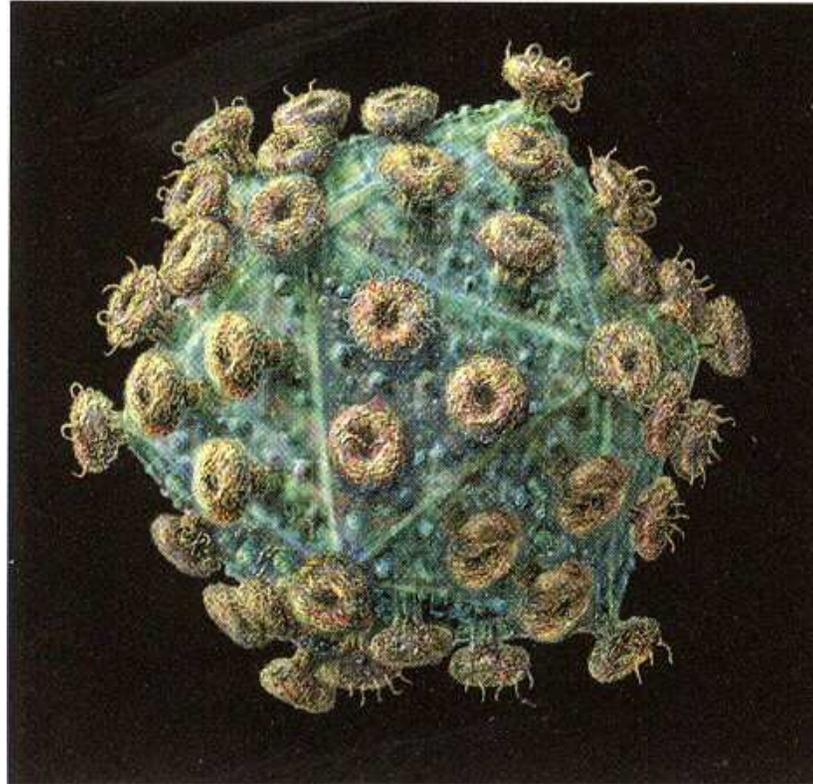
Johannes Kepler (1571–1630)
Mysterium Cosmographicum, Tübingen, 1596.

Kleine Kulturgeschichte der Polytope



Johannes Kepler (1571–1630)
Harmonices Mundi, Linz, 1619.

Kleine Kulturgeschichte der Polytope



Sabine Yerly, et al.,
Antiviral Therapy 2004; 3: 375-384.

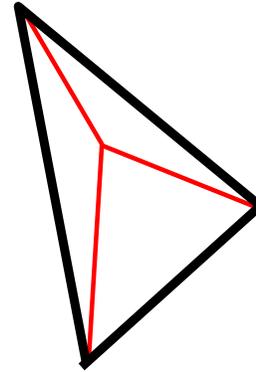
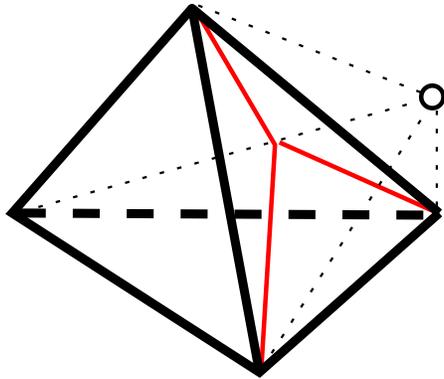
Visualisierung von Polytopen



3-dimensionale Polytope \longrightarrow 2-dimensionale Bilder

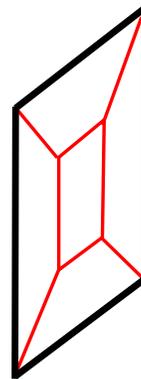
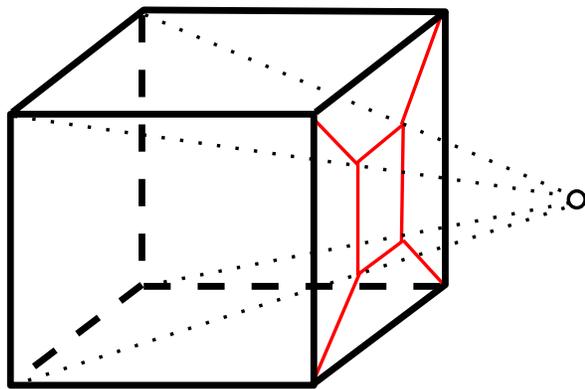
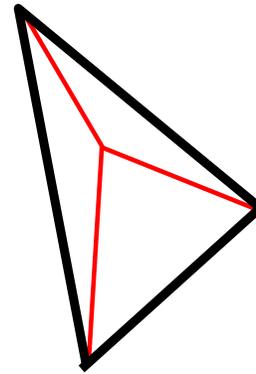
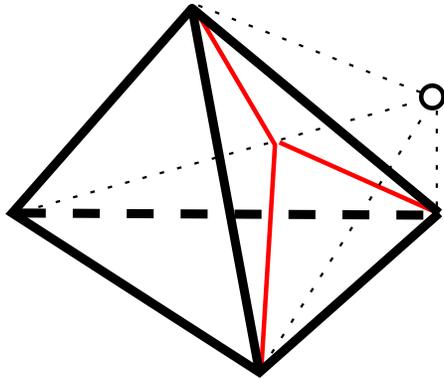
Visualisierung von Polytopen

3-dimensionale Polytope \longrightarrow 2-dimensionale Bilder



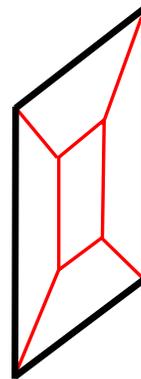
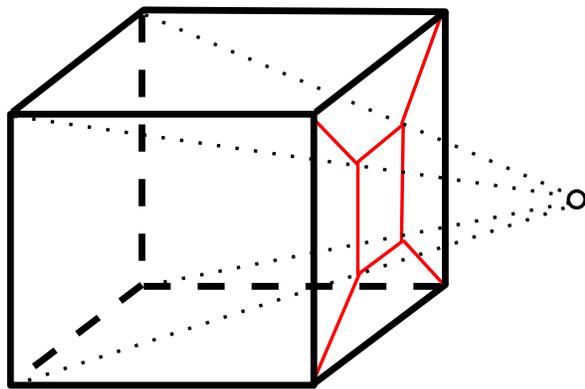
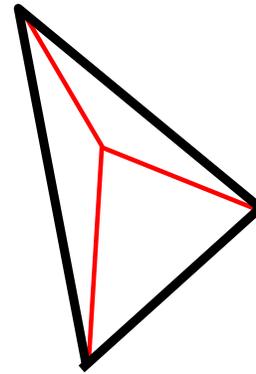
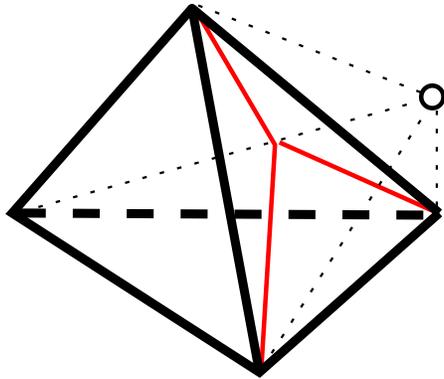
Visualisierung von Polytopen

3-dimensionale Polytope \longrightarrow 2-dimensionale Bilder



Visualisierung von Polytopen

3-dimensionale Polytope \longrightarrow 2-dimensionale Bilder



Schlegel Diagramme

Visualisierung von Polytopen

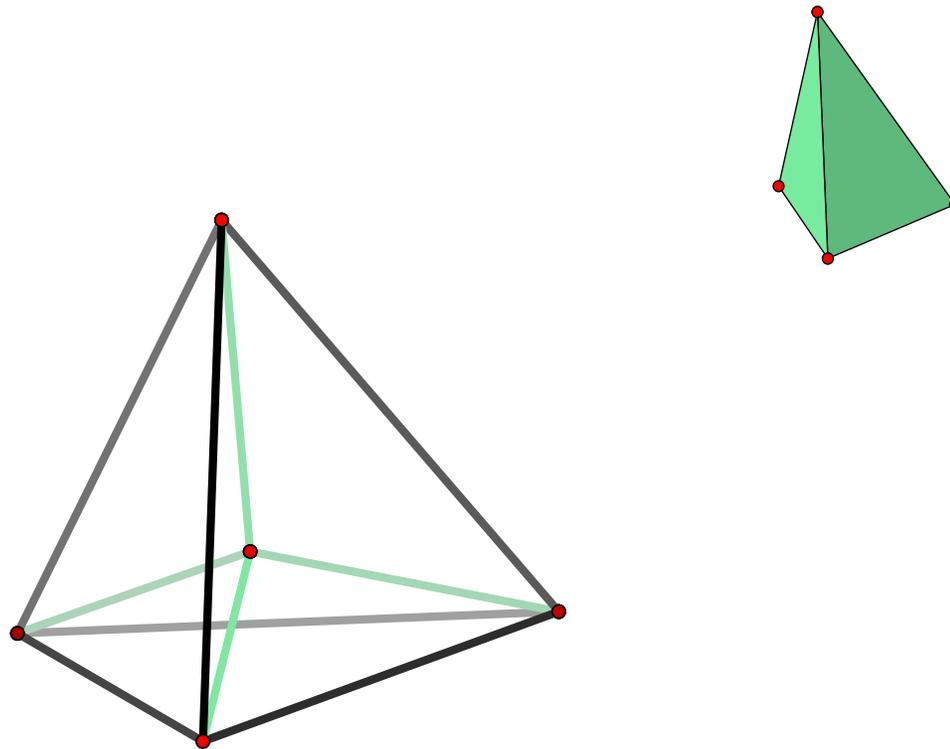


4-dimensionale Polytope \longrightarrow 3-dimensionale Bilder

Visualisierung von Polytopen

4-dimensionale Polytope \longrightarrow 3-dimensionale Bilder

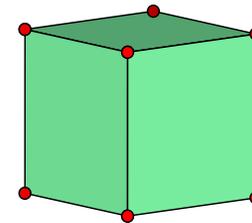
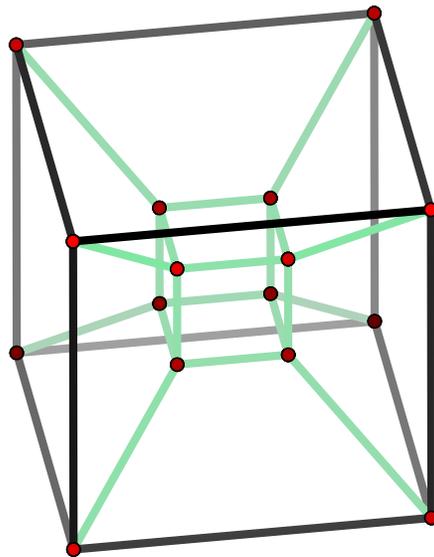
Simplex:



Visualisierung von Polytopen

4-dimensionale Polytope \longrightarrow 3-dimensionale Bilder

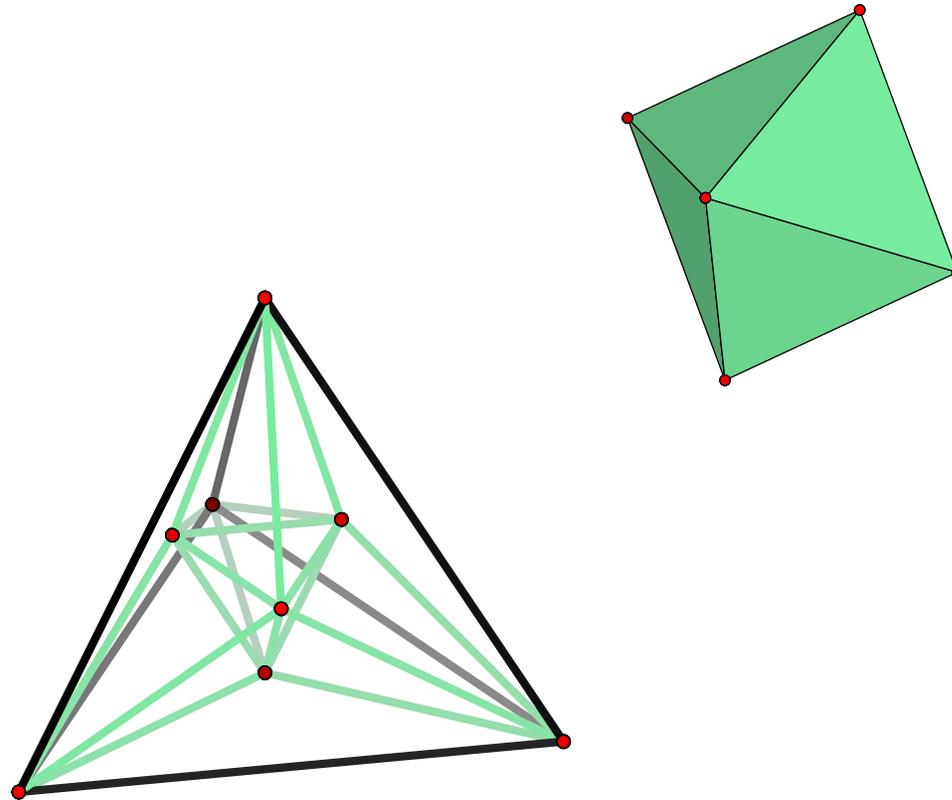
Würfel:



Visualisierung von Polytopen

4-dimensionale Polytope \longrightarrow 3-dimensionale Bilder

Kreuzpolytop:



Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 3



Frage: Wieviele Kanten kann ein 3-dimensionales Polytop mit n Ecken höchstens haben?

Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 3



Frage: Wieviele Kanten kann ein 3-dimensionales Polytop mit n Ecken höchstens haben?

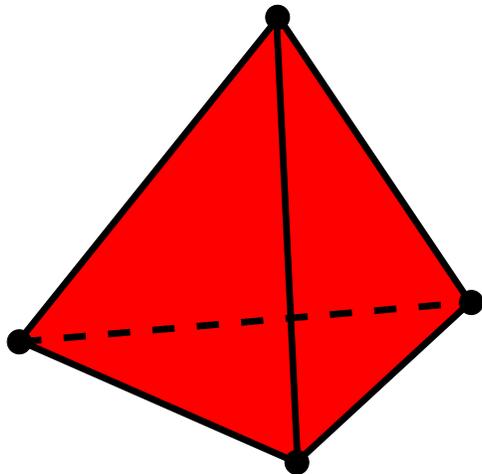
$$\frac{n(n-1)}{2} ?$$

Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 3

Frage: Wieviele Kanten kann ein 3-dimensionales Polytop mit n Ecken höchstens haben?

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad ?$$

$n = 4$:

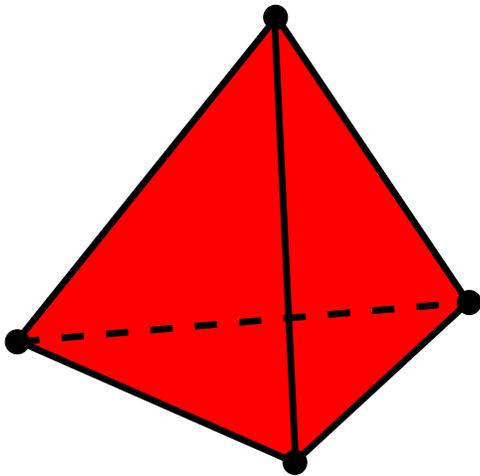


Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 3

Frage: Wieviele Kanten kann ein 3-dimensionales Polytop mit n Ecken höchstens haben?

$$\frac{n(n-1)}{2} ?$$

$n = 4$:



Für $n \geq 5$ ist die Anzahl der Kanten stets kleiner als $\frac{n(n-1)}{2}$.

Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 4



Frage: Wieviele Kanten kann ein 4-dimensionales Polytop mit n Ecken höchstens haben?

Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 4



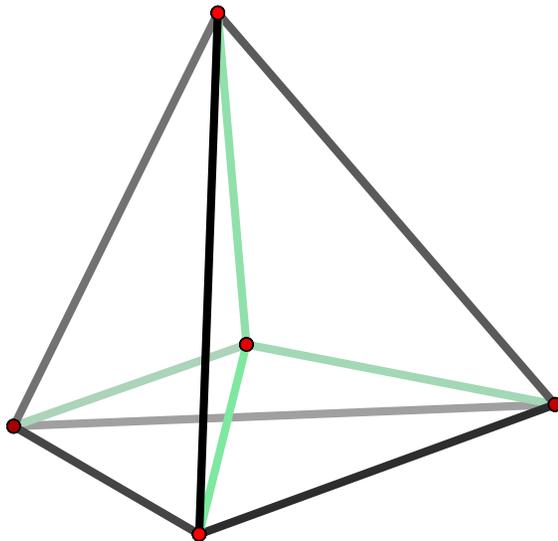
Frage: Wieviele Kanten kann ein 4-dimensionales Polytop mit n Ecken höchstens haben?

$$\frac{n(n-1)}{2} ?$$

Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 4

Frage: Wieviele Kanten kann ein 4-dimensionales Polytop mit n Ecken höchstens haben?

$$\frac{n(n-1)}{2} ?$$



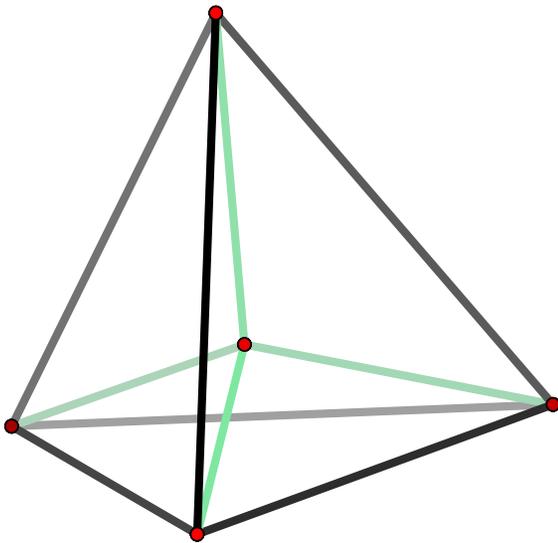
$$n = 5$$

Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 4

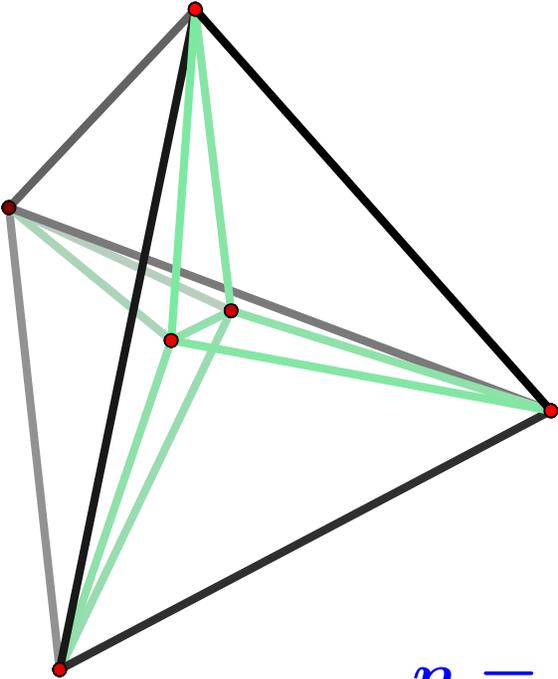


Frage: Wieviele Kanten kann ein 4-dimensionales Polytop mit n Ecken höchstens haben?

$$\frac{n(n-1)}{2} ?$$



$n = 5$



$n = 6$

Das Glasperlenspiel ist also ein Spiel mit sämtlichen Inhalten und Werten unserer Kultur, es spielt mit ihnen, wie etwa in den Blütezeiten der Künste ein Maler mit den Farben seiner Palette gespielt haben mag.

Hermann Hesse: *Das Glasperlenspiel*

