Polytope

Facettenreiches zwischen Geometrie und Optimierung

Eva Maria Feichtner

feichtne@igt.uni-stuttgart.de

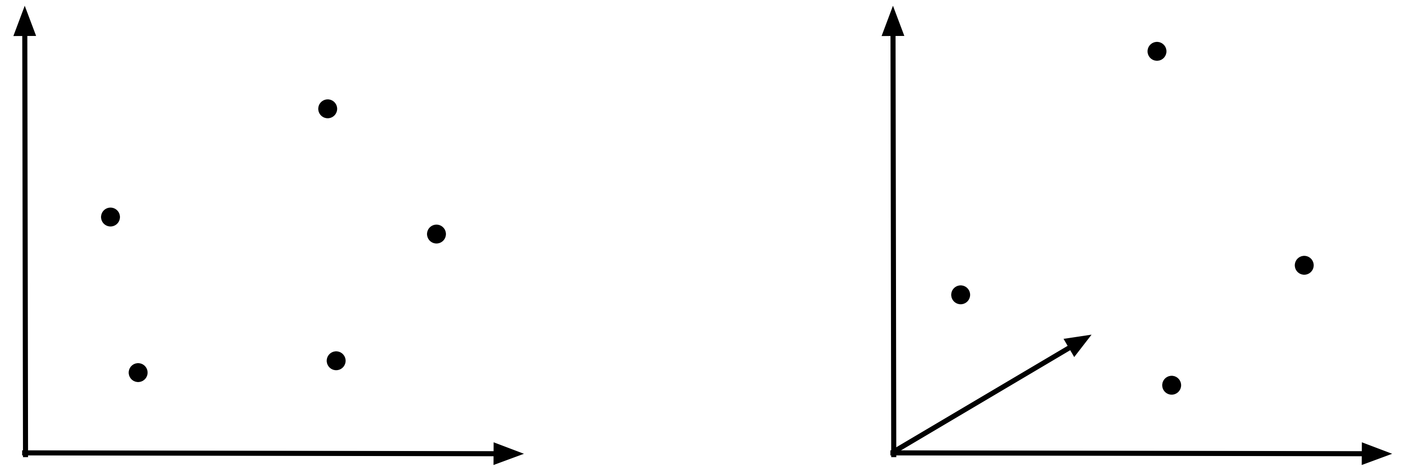
Institut für Geometrie und Topologie, Universität Stuttgart

Polytope

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Punkte im $\mathbb{R}^d$, dann heisst die konvexe Hülle

$$P = \mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,|\, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

das durch $x_1, \ldots, x_n$ bestimmte Polytop.

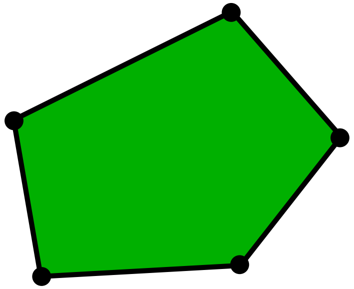


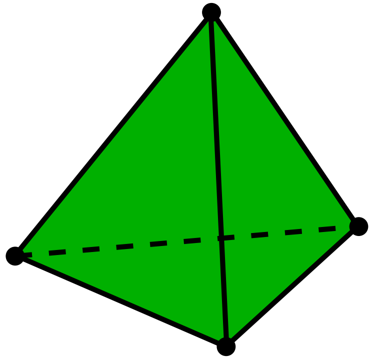
Polytope

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Punkte im $\mathbb{R}^d$, dann heisst die konvexe Hülle

$$P = \mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,|\, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

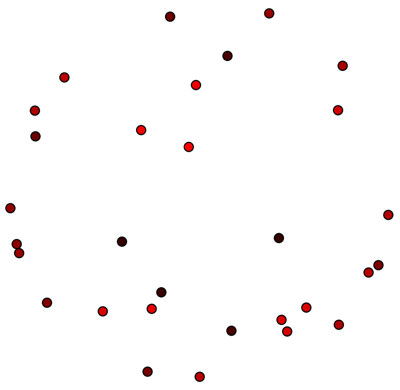
das durch $x_1, \ldots, x_n$ bestimmte Polytop.

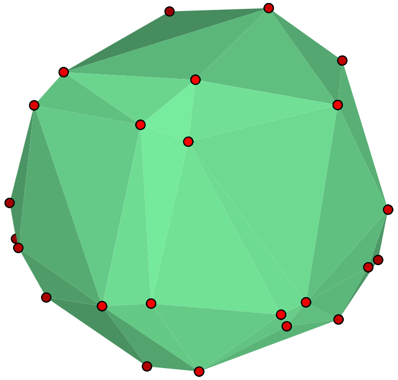


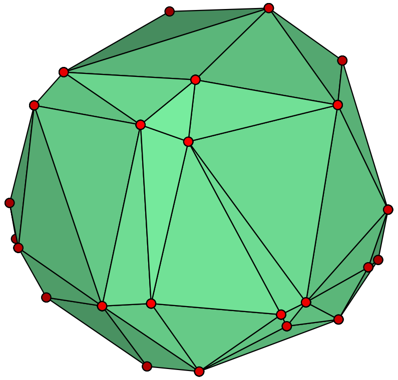


Polytope

Man kann sie dem Zufall überlassen . . .





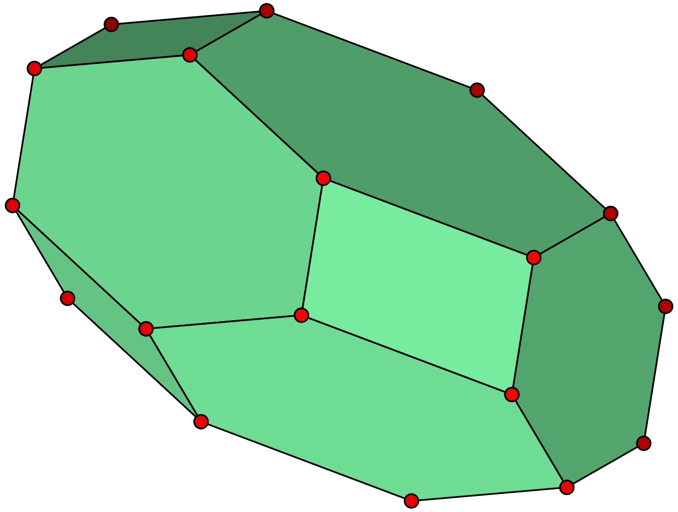


Polytope

... oder systematisch konstruieren:

$$\Pi_{d-1} = \operatorname{conv}\{(\sigma(1),\ldots,\sigma(d)) \,|\, \sigma \in \mathfrak{S}_d\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

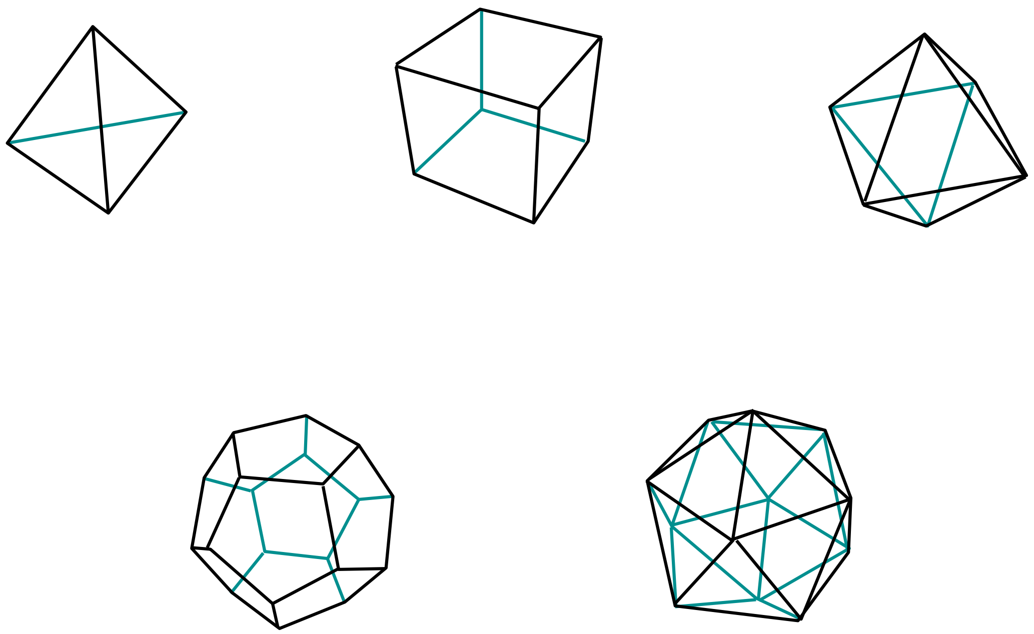
PERMUTAEDER



Π_3

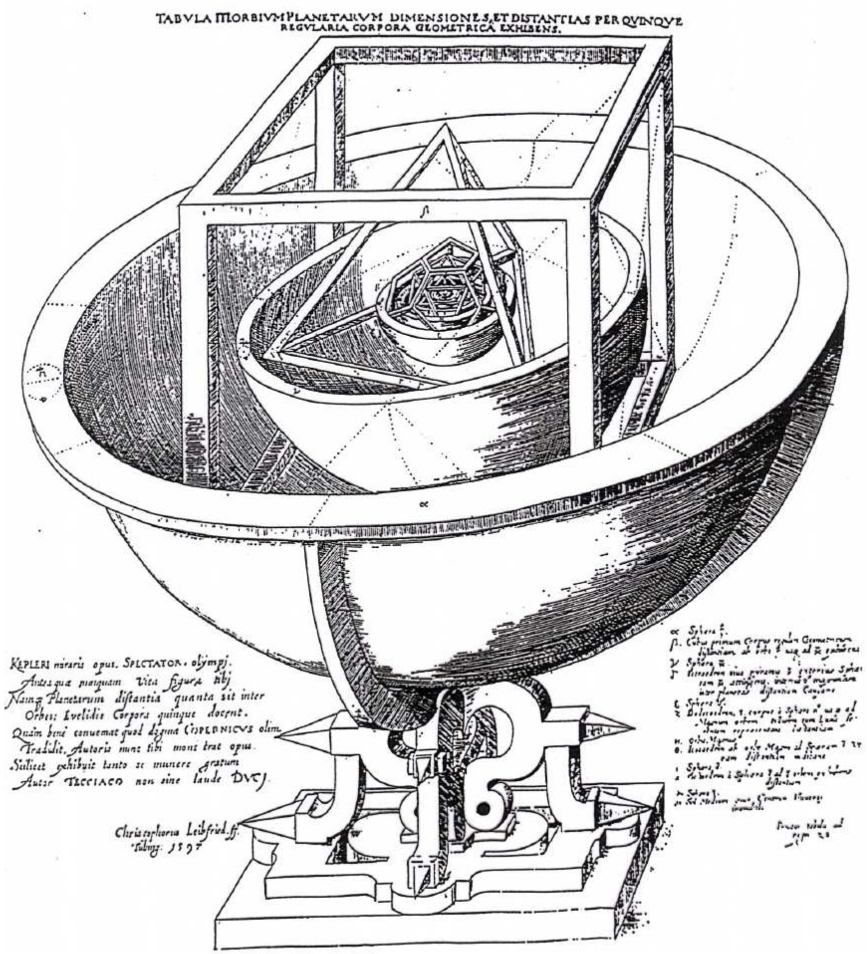
Kleine Kulturgeschichte der Polytope

Platonische Körper



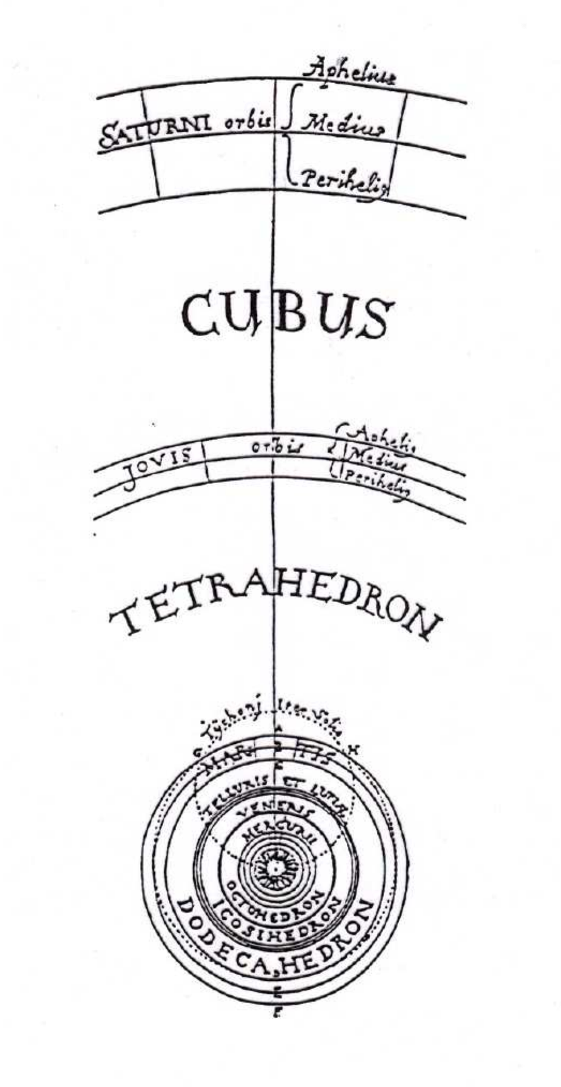
3. Jhdt v. Chr.

Kleine Kulturgeschichte der Polytope



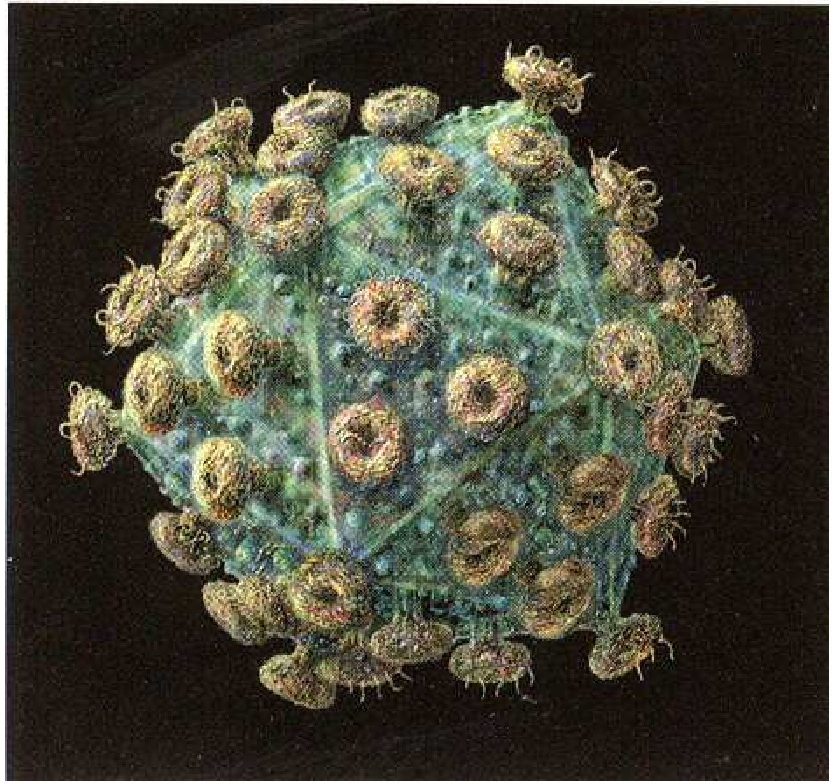
Johannes Kepler (1571–1630)
Mysterium Cosmographicum, Tübingen, 1596.

Kleine Kulturgeschichte der Polytope



Johannes Kepler (1571–1630)
Harmonices Mundi, Linz, 1619.

Kleine Kulturgeschichte der Polytope



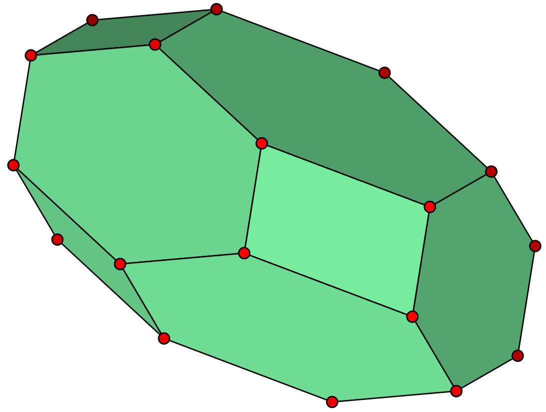
Sabine Yerly, et al.,
Antiviral Therapy 2004; 3: 375-384.

Seiten von Polytopen

Sei P Polytop und H eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^d$, so dass einer der durch die Hyperebene bestimmten Halbräume keinen gemeinsamen Punkt mit P besitzt. Dann heisst

$$F = P \cap H$$

eine Seite von P.



Je nach Dimension spricht man von Ecken, Kanten, Flächen, ... und Facetten.

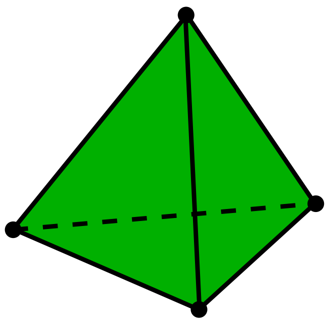
Anzahl von Kanten in Polytopen

Frage: Wieviele Kanten kann eine Polytope mit n Ecken höchstens haben?

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

dim $P = 3$:

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ k &= \text{Anzahl der Kanten} = 6 \end{aligned}$$



Behauptung:

$$n \geq 5 \qquad \text{impliziert, dass} \qquad k < \frac{n(n-1)}{2}.$$

Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 3

Eulersche Formel:

Sei P ein 3-dimensionales Polytop mit n Ecken, k Kanten und f Facetten.

Dann gilt:

$$n - k + f = 2 .$$

Leonard Euler
(1707-1783)

Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 3

Behauptung:

$$n \geq 5 \qquad \text{impliziert, dass} \qquad k < \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Es bezeichne f_i die Anzahl der i-Ecke unter den Facetten.

$$\begin{aligned} f &= f_3 + f_4 + f_5 \ldots \\ 2k &= 3f_3 + 4f_4 + 5\,f_5 \ldots \end{aligned}$$

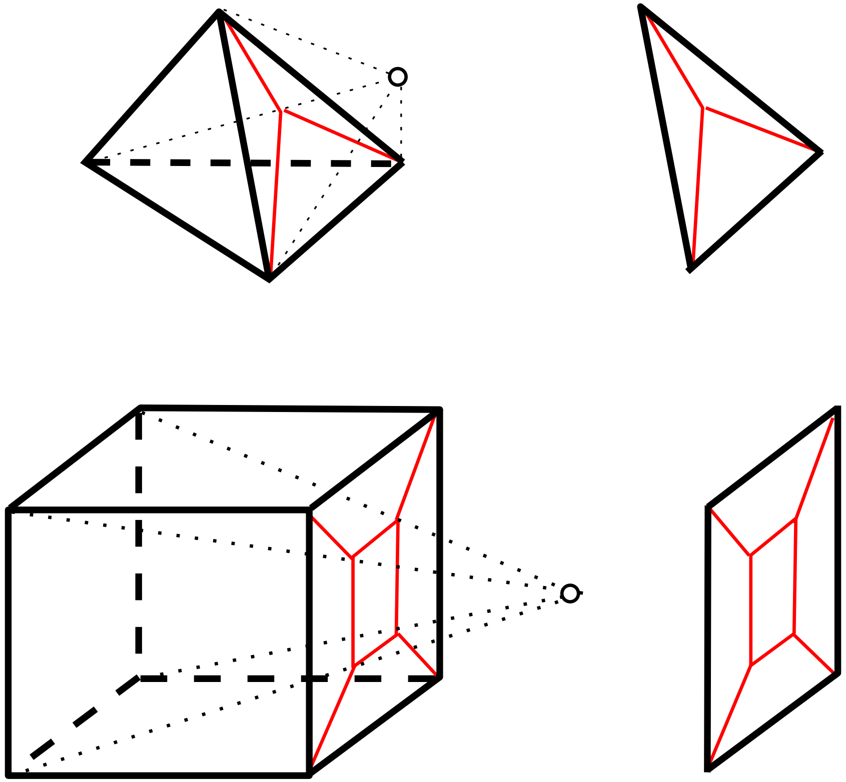
Es folgt, dass

$$2k - 3f \;=\; f_4 + 2f_5 + 3\,f_6 + \ldots \geq 0\,,$$

und damit gilt:

$$k \;\leq\; 3(k-f) \;=\; 3(n-2) \;=\; 3n - 6 < \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{für } n \geq 5.$$

Visualisierung von Polytopen – Dimension 3

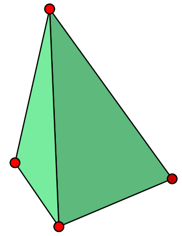


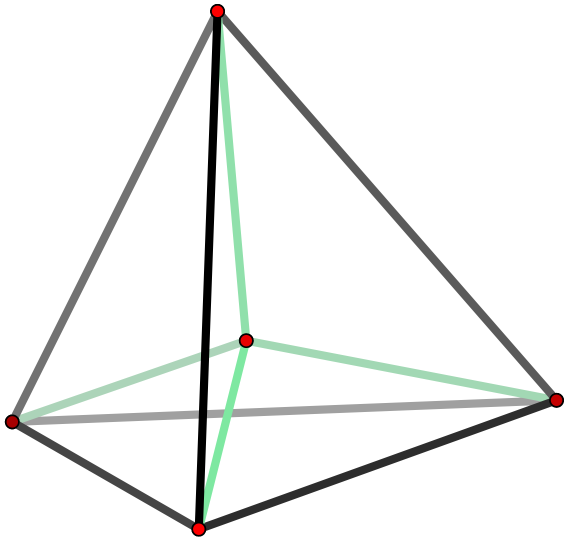
Schlegel Diagramme

Visualisierung von Polytopen – Dimension 4

Simplex:

$$\Delta_d = \operatorname{conv}(e_1, \ldots, e_{d+1})$$

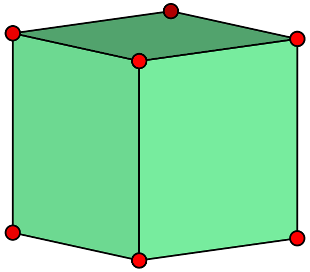


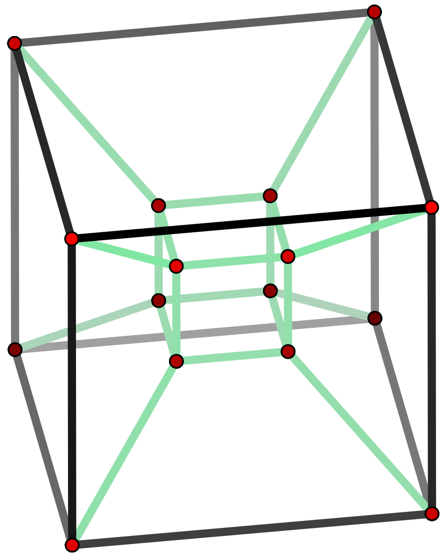


Visualisierung von Polytopen – Dimension 4

Würfel:

$$C_d = \operatorname{conv}\left(\{+1, -1\}^d\right)$$

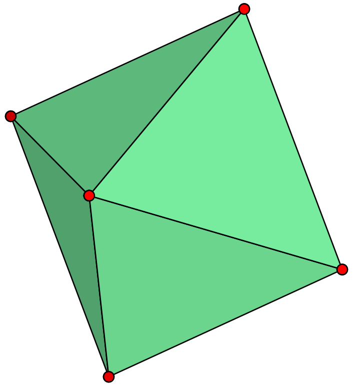


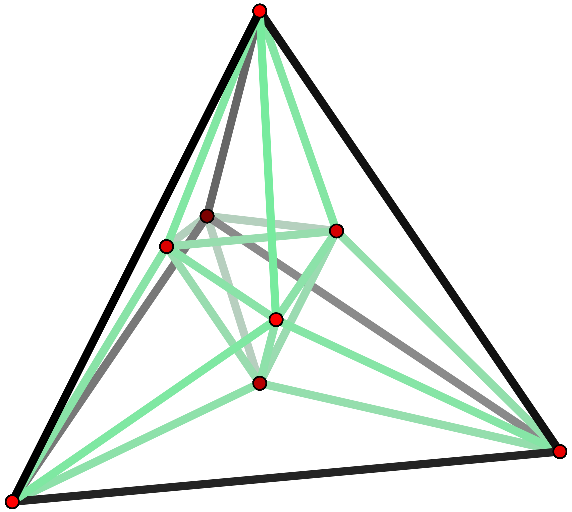


Visualisierung von Polytopen – Dimension 4

Kreuzpolytop:

$$C_d = \operatorname{conv}(e_1, -e_1, \ldots, e_d, -e_d)$$



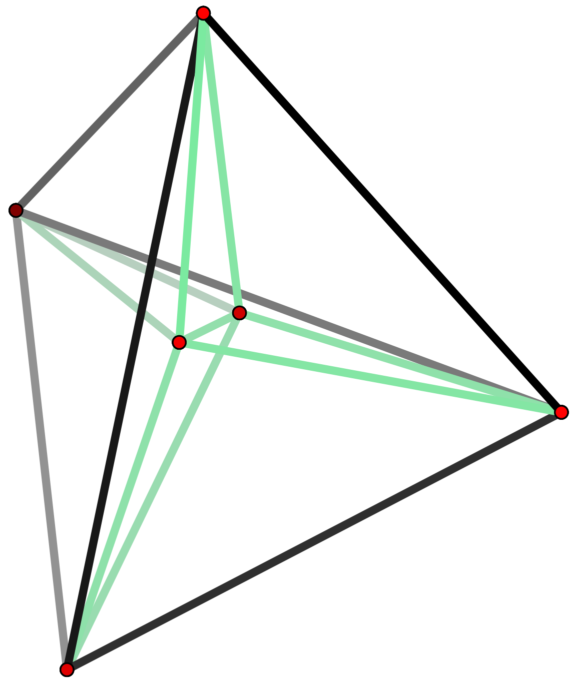


Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 4

Frage: Wieviele Kanten kann ein 4-dimensionales Polytop mit n Ecken höchstens haben?

$$\frac{n\,(n-1)}{2}\ ?$$

Es gibt ein 4-dimensionales Polytop mit 6 Ecken und $\frac{6\,(6-1)}{2} = 15$ Kanten.



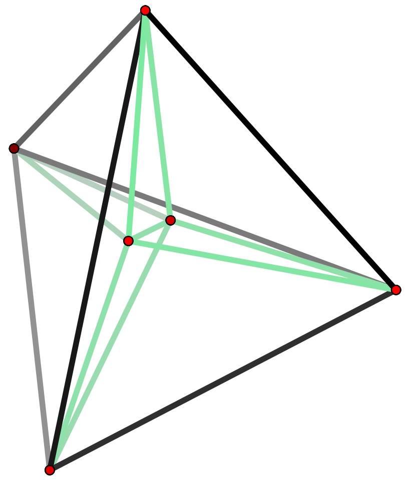
Zyklische Polytope

$$\Phi : t \longmapsto (t, t^2, t^3, \ldots, t^d)$$

$$C_d(n) = \mathrm{conv}\{\Phi(1), \ldots, \Phi(n)\}$$

- Je k Ecken, $k \leq d/2$, bestimmen eine $(k-1)$-dimensionale Seite von $C_d(n)$.
- Für jedes $n \geq 5$ gibt es ein 4-dimensionales Polytop, in dem jedes Paar von Ecken eine Kante bestimmt.

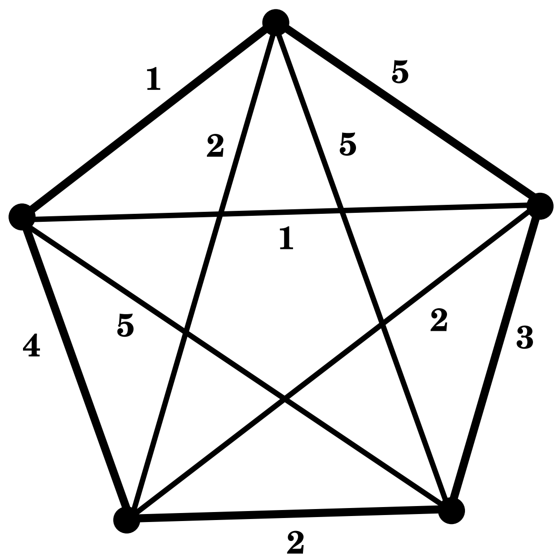
$C_4(6)$



Polytope in der Optimierung

Das Problem des Handlungsreisenden

Gegeben ein Netzwerk aus n Städten mit Angabe der Fahrtkosten zwischen den jeweiligen Städten. Finde die für einen Handlungsreisenden günstigste Tour durch alle Städte.



Polytope in der Optimierung

Das Standardproblem der linearen Optimierung

Gegeben

$$a_{i,j} \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq m\,,\ 1 \leq j \leq n\,,$$
$$b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}\,,$$
$$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\,.$$

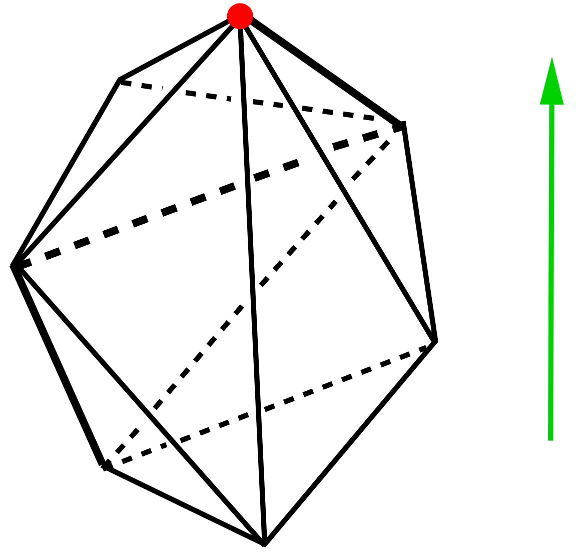
Finde Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}$ für

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n & \leq & b_m\,, \end{array} \right.$$

so dass $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ maximal ist.

Polytope in der Optimierung

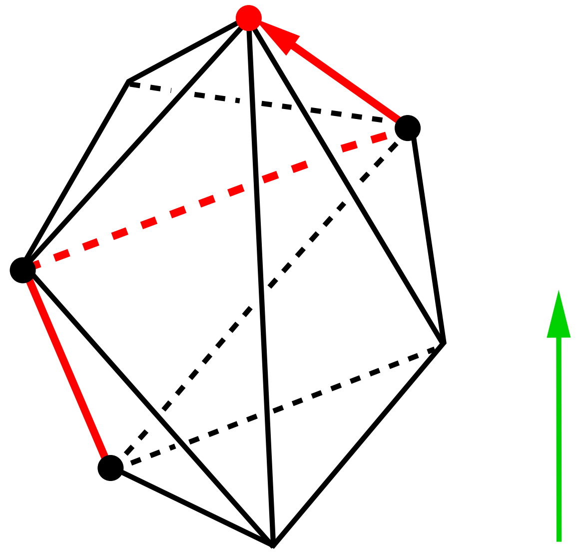
- Die Lösungen von $(*)$ bilden ein Polytop P in $\mathbb{R}^n$.
- Die optimale Lösung ist das Maximum einer linearen Funktion auf P.
- Die optimale Lösung wird in einer Ecke des Polytops angenommen.



Der Simplexalgorithmus

G.B. Dantzig, 1951

- Finde eine extremale Lösung des Ungleichungssystems $(*)$.
- Laufe entlang des Ecken-Kanten-Gerüsts von P
  "in Richtung besserer Lösungen".
  $\longrightarrow$ Pivot-Strategien



Offenes Problem:
Gibt es eine Pivot-Strategie, die den Algorithmus polynomial macht in der Anzahl der Ecken und der Dimension von P?