Facettenreiche Geometrie

Eine Einladung zum Glasperlenspiel

Eva Maria Feichtner

`feichtne@math.ethz.ch`

Departement Mathematik, ETH Zürich

Geister wie Abälard, wie Leibniz, wie Hegel haben den Traum ohne Zweifel gekannt, das geistige Universum in konzentrische Systeme einzufangen und die lebendige Schönheit des Geistigen und der Kunst mit der magischen Formulierkraft der exakten Disziplinen zu vereinigen.

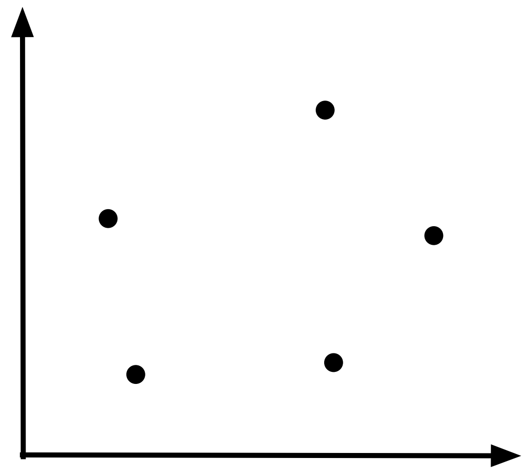
Hermann Hesse: *Das Glasperlenspiel*
Fretz & Wasmuth, Zürich, 1943.

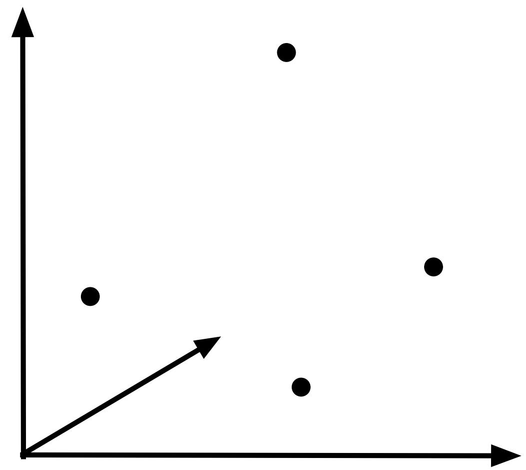
Polytope

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Punkte im $\mathbb{R}^d$, dann heisst die konvexe Hülle

$$P = \mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,|\, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

das durch $x_1, \ldots, x_n$ bestimmte Polytop.



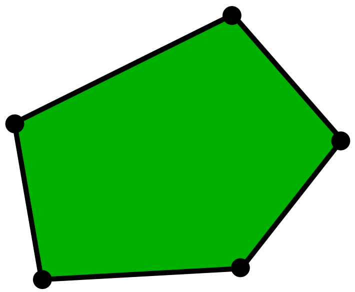


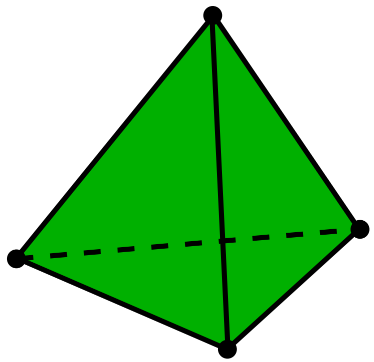
Polytope

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Punkte im $\mathbb{R}^d$, dann heisst die konvexe Hülle

$$P = \mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,|\, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

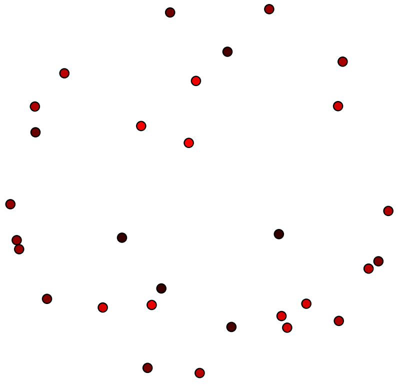
das durch $x_1, \ldots, x_n$ bestimmte Polytop.

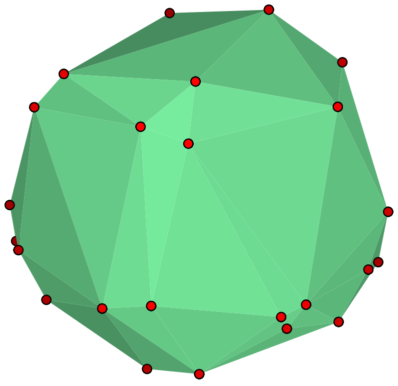


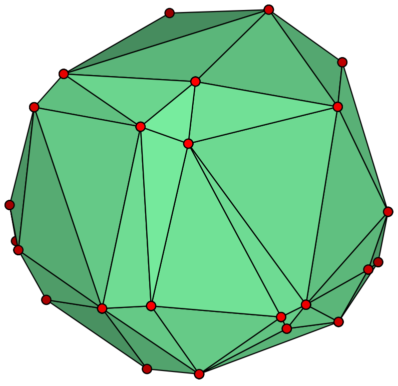


Polytope

Man kann sie dem Zufall überlassen . . .





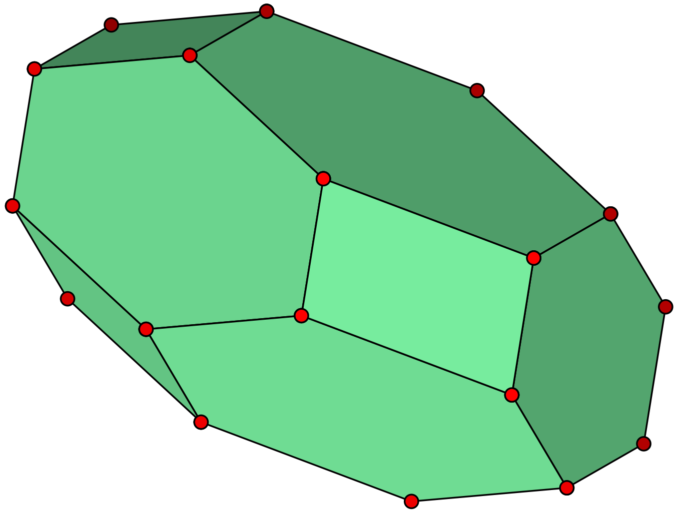


Polytope

... oder systematisch konstruieren:

$$\color{red}{\Pi_{d-1}} = \mathrm{conv}\{(\sigma(1),\ldots,\sigma(d)) \,|\, \sigma \in \mathfrak{S}_d\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

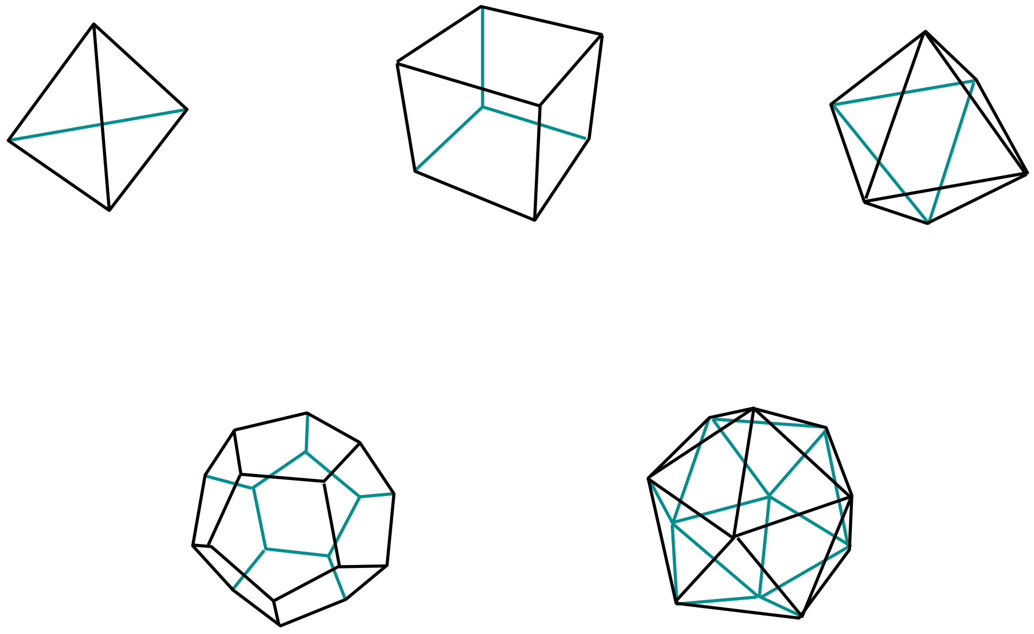
PERMUTAEDER



Π_3

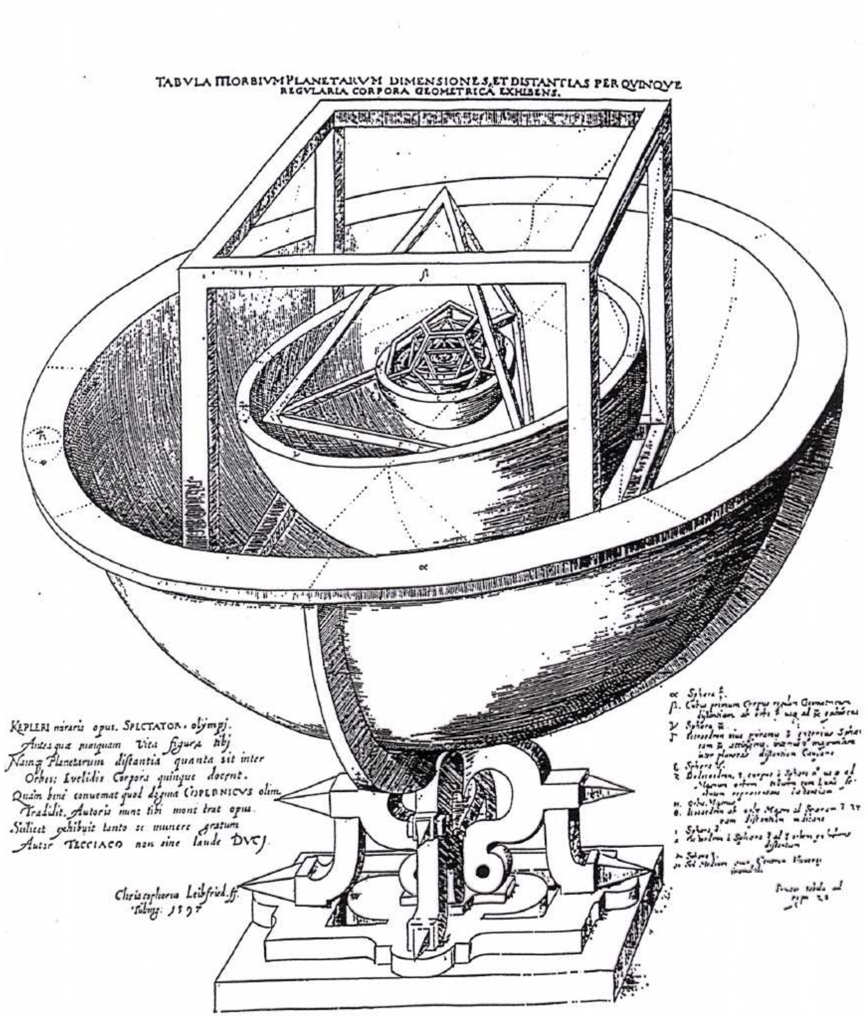
Kleine Kulturgeschichte der Polytope

Platonische Körper



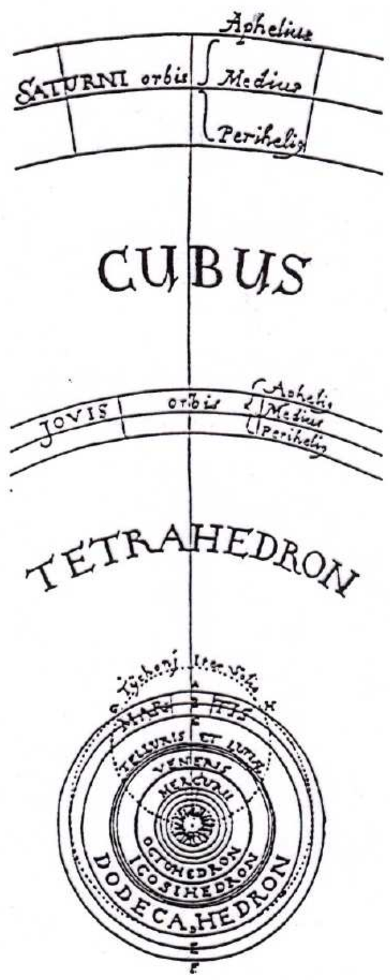
3. Jhdt v. Chr.

Kleine Kulturgeschichte der Polytope



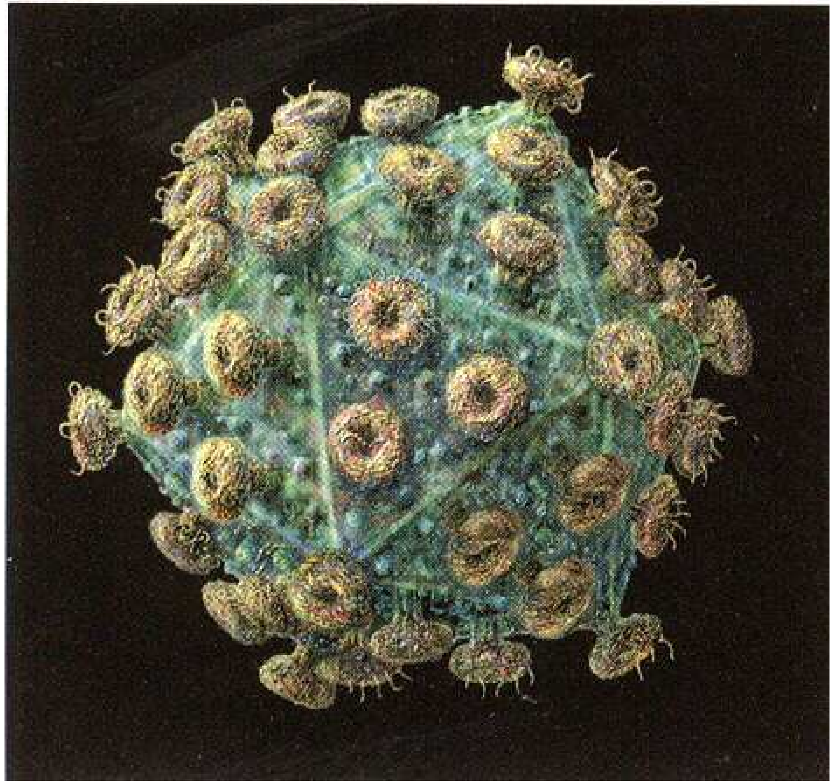
Johannes Kepler (1571–1630)
Mysterium Cosmographicum, Tübingen, 1596.

Kleine Kulturgeschichte der Polytope



Johannes Kepler (1571–1630)
Harmonices Mundi, Linz, 1619.

Kleine Kulturgeschichte der Polytope



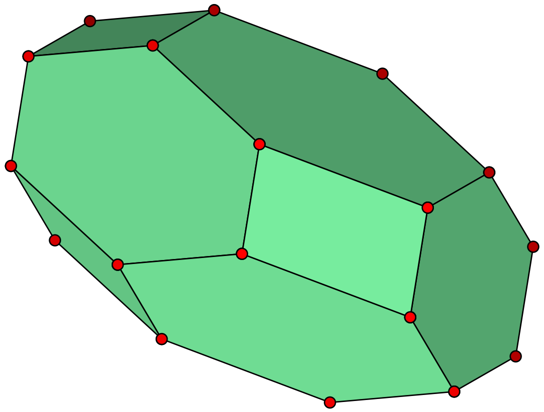
Sabine Yerly, et al.,
Antiviral Therapy 2004; 3: 375-384.

Seiten von Polytopen

Sei P Polytop und H eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^d$, so dass einer der durch die Hyperebene bestimmten Halbräume keinen gemeinsamen Punkt mit P besitzt. Dann heisst

$$F = P \cap H$$

eine Seite von P.



Je nach Dimension spricht man von Ecken, Kanten, Flächen, ... und Facetten.

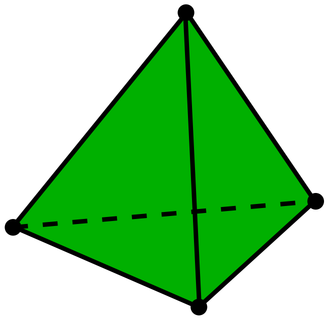
Anzahl von Kanten in Polytopen

Frage: Wieviele Kanten kann eine Polytope mit n Ecken höchstens haben?

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

dim $P = 3$:

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ k &= \text{Anzahl der Kanten} \;= 6 \end{aligned}$$



Behauptung:

$$n \geq 5 \qquad \text{impliziert, dass} \qquad k < \frac{n(n-1)}{2}.$$

Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 3

Eulersche Formel:

Sei P ein 3-dimensionales Polytop mit n Ecken, k Kanten und f Facetten.

Dann gilt:

$$n - k + f = 2\,.$$

Leonard Euler
(1707-1783)

Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 3

Behauptung:

$$n \geq 5 \qquad \text{impliziert, dass} \qquad k < \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Es bezeichne f_i die Anzahl der i-Ecke unter den Facetten.

$$\begin{aligned} f &= f_3 + f_4 + f_5 \ldots \\ 2k &= 3f_3 + 4f_4 + 5\,f_5 \ldots \end{aligned}$$

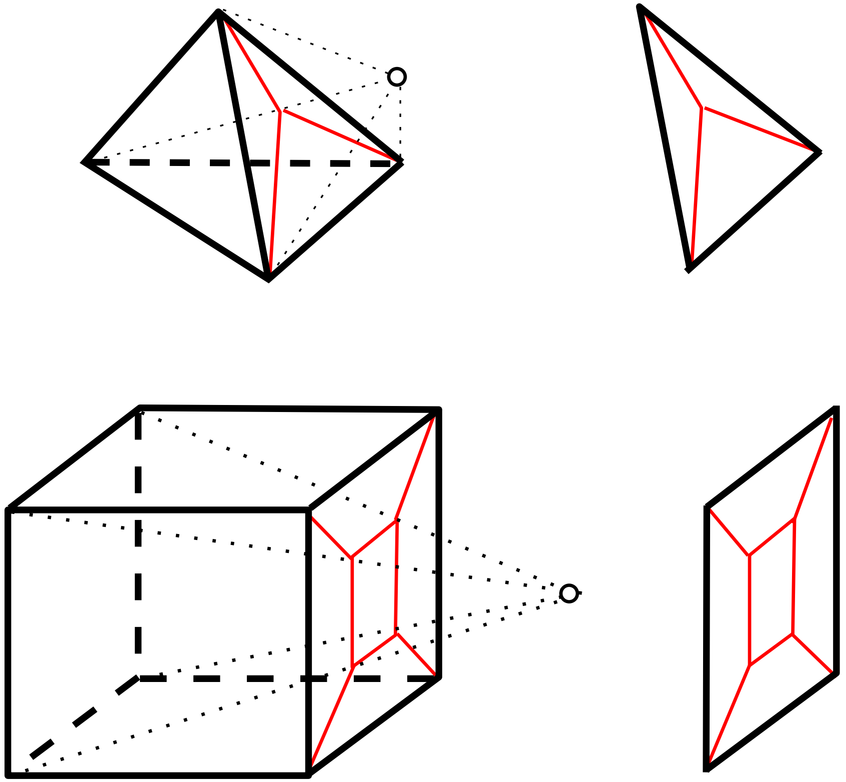
Es folgt, dass

$$2k - 3f = f_4 + 2f_5 + 3\,f_6 + \ldots \geq 0\,,$$

und damit gilt:

$$k \leq 3(k-f) = 3(n-2) = 3n - 6 < \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{für } n \geq 5.$$

Visualisierung von Polytopen – Dimension 3

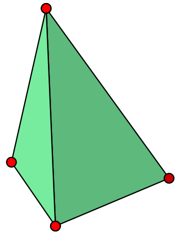


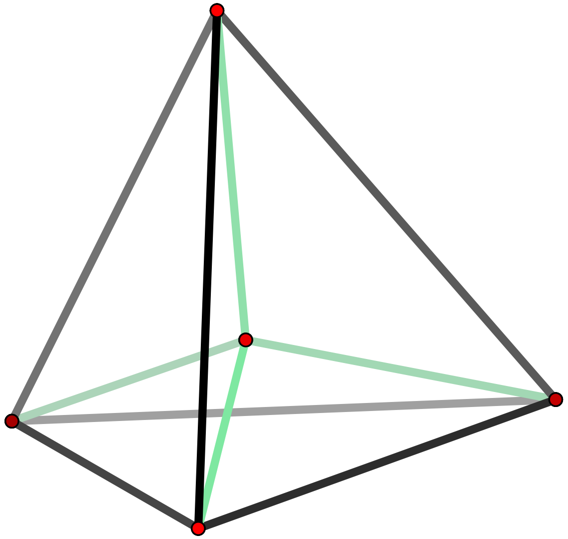
Schlegel Diagramme

Visualisierung von Polytopen – Dimension 4

Simplex:

$$\Delta_d = \operatorname{conv}(e_1, \ldots, e_{d+1})$$

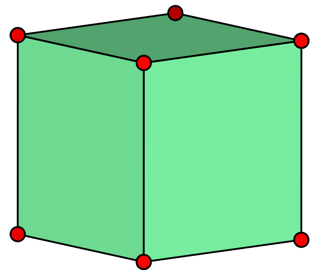


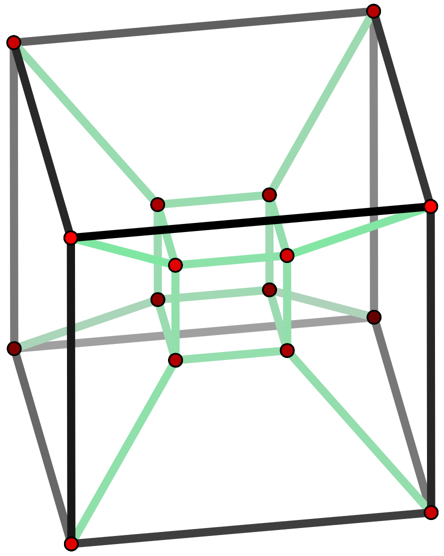


Visualisierung von Polytopen – Dimension 4

Würfel:

$$C_d \;=\; \mathrm{conv}\,(\,\{+1,-1\}^d)$$

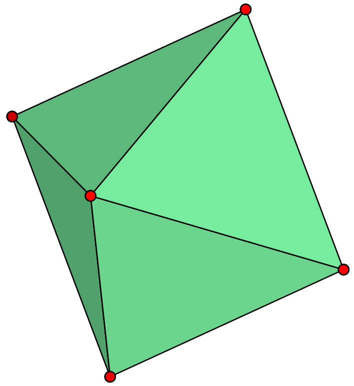


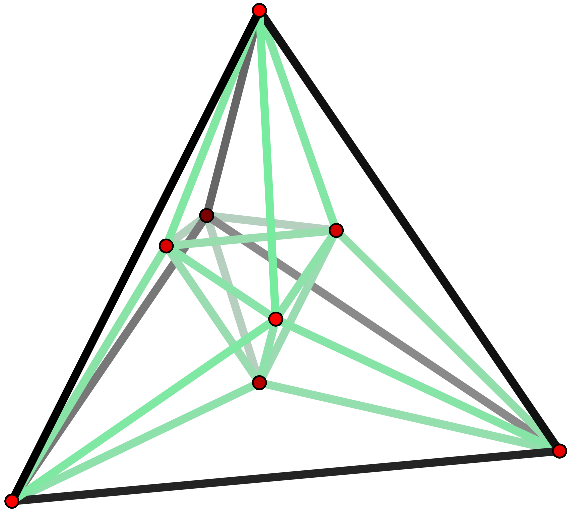


Visualisierung von Polytopen – Dimension 4

Kreuzpolytop:

$$C_d = \operatorname{conv}(e_1, -e_1, \ldots, e_d, -e_d)$$

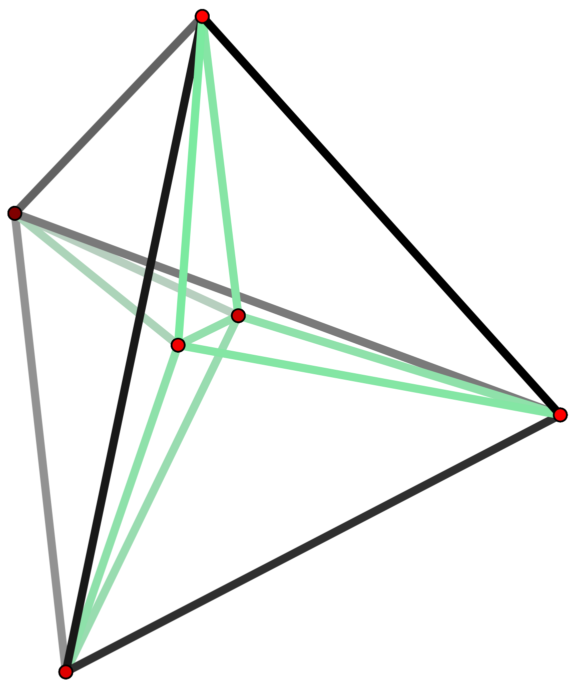




Anzahl von Kanten in Polytopen – Dimension 4

Frage: Wieviele Kanten kann ein 4-dimensionales Polytop mit n Ecken höchstens haben?

$$\frac{n\,(n-1)}{2}\ ?$$

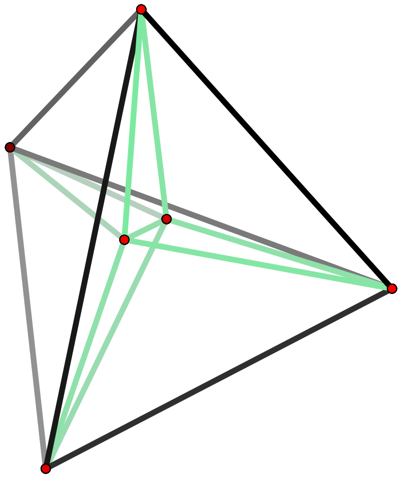


Zyklische Polytope

$$\Phi \; : \; t \longmapsto (t, t^2, t^3, \ldots, t^d)$$

$$C_d(n) \; = \; \mathrm{conv}\{\Phi(1), \ldots, \Phi(n)\}$$

- Je k Ecken, $k \leq d/2$, bestimmen eine $(k-1)$-dimensionale Seite von $C_d(n)$.
- Für jedes $n \geq 5$ gibt es ein 4-dimensionales Polytop, in dem jedes Paar von Ecken eine Kante bestimmt.



$C_4(6)$

Das Upper-Bound Theorem für Polytope

Sei P Polytop in Dimension d.

$f_k(P) \;:=\;$ Anzahl k-dimensionaler Seiten von P

Upper-Bound Theorem: *(Peter McMullen, 1971)*

Für jedes d-dimensionale Polytop mit n Ecken ist

$$f_k(P) \;\leq\; f_k(C_d(n))$$

für $0 \leq k \leq d-1$.

Das Upper-Bound Theorem für Sphären

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ränder simplizialer} \\ \text{Polytope} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{simpliziale} \\ \text{Sphären} \end{array} \right\}$$

Upper-Bound Theorem: *(Richard Stanley, 1975)*

Für jede simpliziale Sphäre in Dimension d mit n Ecken ist

$$f_k(S) \ \leq \ f_k(C_d(n))$$

für $0 \leq k \leq d-1$.

Das Glasperlenspiel ist also ein Spiel mit sämtlichen Inhalten und Werten unserer Kultur, es spielt mit ihnen, wie etwa in den Blütezeiten der Künste ein Maler mit den Farben seiner Palette gespielt haben mag.

Hermann Hesse: *Das Glasperlenspiel*