2. Übungsblatt

1. Berechnen Sie die simpliziale Homologie des „Dreieckfallschirms"- gemeint ist der Δ-Komplex, der entsteht, wenn man die Ecken eines 2-dimensionalen Simplex identifiziert.

2. Es sei L_n der 3-dimensionale Δ-Komplex, der aus n Tetraedern $T_1, \ldots, T_n$ wie folgt entsteht: Man ordne die Tetraeder zyklisch um eine Achse, d.h. die T_i teilen eine gemeinsame Kante und sind derart um diese angeordnet, dass T_i eine gemeinsame Facette mit T_{i-1} und mit T_{i+1} hat. Indices seien dabei modulo n verstanden. Man identifiziere dann die Bodenfacette von T_i mit der Deckelfacette von T_{i+1} für alle $i \in \mathbb{Z}_n$.

Zeigen Sie, dass für die simpliziale Homologie von L_n gilt:

$$H_j^{\Delta}(L_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } j = 0, 3 \\ \mathbb{Z}_n & \text{für } j = 1 \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

3. **a)** Es seien $f, g : X \longrightarrow Y$ und $h, k : Y \longrightarrow Z$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie:

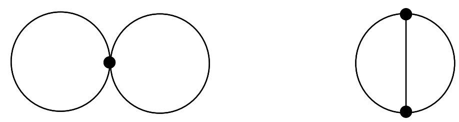
(i) Ist $f \simeq g$, so ist auch $h \circ f \simeq h \circ g$.

(ii) Ist $h \simeq k$, so ist auch $h \circ f \simeq k \circ f$.

b) Es seien $f, g : X \longrightarrow S^n$ stetige Abbildungen und dabei $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass dann f homotop zu g ist.

4. **a)** Zeigen Sie, dass das Möbiusband homotopieäquivalent zum Zylinder $S^1 \times I$ ist.

b) Geben Sie einander homotopieinverse Abbildungen zwischen den nachfolgend skizzierten Räumen an.



5. Es sei $A \subseteq X$. Eine Abbildung $r : X \longrightarrow A$ heisst *Retrakt* von X auf A, falls $r|_A = \mathrm{id}_A$. Zeigen Sie, dass ein Retrakt stets einen injektiven Homomorphismus in Homologie induziert.

Ideen, Lösungen und Diskussion: Do, 15.11.07, 13–15 Uhr.