Prof. Dr. Eva-Maria Feichtner

Algebraische Topologie
Wintersemester 2007/2008

3. Übungsblatt

1. **a)** Gibt es eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0 \text{ ?}$$

b) Welche abelschen Gruppen A können auftreten in exakten Sequenzen der Form

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^m} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow 0\,,$$

wobei p Primzahl und $m, n \in \mathbb{N}$?

c) Wie steht es mit

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0\,,$$

für $n \in \mathbb{N}$?

2. Zeigen Sie folgende Äquivalenz für die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\phi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \longrightarrow 0 \,:$$

(1) Die Sequenz zerfällt.

(2) Es gibt einen Homomorphismus $p:\, A_2 \longrightarrow A_1$ mit $p \circ \phi = \mathrm{id}_{A_1}$.

(3) Es gibt einen Homomorphismus $q:\, A_3 \longrightarrow A_2$ mit $\psi \circ q = \mathrm{id}_{A_3}$.

3. Zeigen Sie, dass die Inklusion $i:\, A \longrightarrow X$ Isomorphismen in der Paarsequenz für das Raumpaar (X, A) induziert genau dann, wenn $H_*(X, A) = 0$.

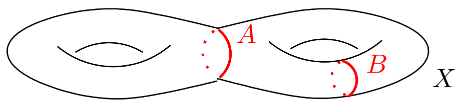
4. **a)** Berechnen Sie die relative Homologie $H_*(S^2, A)$, wobei A eine endliche Punktmenge auf der 2-Sphäre ist.

b) Berechnen Sie die relative Homologie $H_*(S^1 \times S^1, A)$, wobei A eine endliche Punktmenge auf dem Torus ist.

5. Ein geschlossene, orientierbare Fläche X vom Geschlecht 2 hat folgende Homologie:

$$H_j(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } j = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^4 & \text{für } j = 1 \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die relativen Homologiegruppen $H_*(X, A)$ und $H_*(X, B)$, wobei A und B die unten skizzierten Kurven auf X sind.



Ideen, Lösungen und Diskussion: Do, 06.12.07, 13–15 Uhr.