Prof. Dr. Eva-Maria Feichtner

Algebraische Topologie
Wintersemester 2007/2008

4. Übungsblatt

1. Beweisen Sie das *5-Lemma*:

Sind die Zeilen des nachstehenden Diagramms abelscher Gruppen exakt, und sind α, β, δ und ϵ Isomorphismen, so ist auch γ ein Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r, "k'"] & D' \arrow[r, "l'"] & E' . \end{tikzcd}$$

2. Für einen Raum X bezeichne SX die *Einhängung* (*suspension*) von X, nämlich folgenden Quotientenraum:

$$SX \;=\; X \times [0,1] \,/ \sim ,$$

wobei $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2 = 0$ oder $t_1 = t_2 = 1$. Überzeugen Sie sich davon, dass $S^n \cong S\, S^{n-1}$ für $n \geq 1$.

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\widetilde{H}_n(X) \;\cong\; \widetilde{H}_{n+1}(SX) \qquad \text{für } n \geq 0 .$$

b) Versuchen Sie eine explizite Kettenabbildung $s : \widetilde{C}_n(X) \longrightarrow \widetilde{C}_{n+1}(SX)$ zu konstruieren, die den Isomorphismus in a) induziert.

3. Sei X der Kegel über dem 1-Skelett (d.h. der Vereiningung aller 0- und 1-dimensionalen Simplexe) von Δ^3. Mit anderen Worten: man betrachte die Vereinigung aller Streckensegmente, die das Baryzentrum von Δ^3 mit Punkten auf dem Ecken-Kanten-Gerüst von Δ^3 verbinden.

Berechnen Sie die sogenannten *lokalen Homologiegruppen* von X, also $H_*(X, X \setminus \{x\})$ für alle $x \in X$. Definieren Sie sodann ∂X als den Teilraum aller Punkte mit trivialer lokaler Homologie und berechnen Sie die lokalen Homologiegruppen von ∂X.

Ideen, Lösungen und Diskussion: Do, 20.12.07, 13–15 Uhr.