Prof. Dr. Eva-Maria Feichtner

6. Übungsblatt

1.* Die *Operation einer Gruppe* G auf einem topologischen Raum X ist definiert durch einen Homomorphismus von G in die Homöomorphismengruppe von X. Die Gruppenoperation heisst *frei*, wenn alle Homöomorphismen, die nichttrivialen Gruppenelementen zugeordnet werden, fixpunktfrei sind.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_2$ die einzige Gruppe ist, die frei auf einer Sphäre gerader Dimension operieren kann.

2.* Neben der Einhängung von Räumen (vgl. Blatt 4, Aufg. 2) kann man auch die Einhängung von Abbildungen definieren: Für $f : X \longrightarrow Y$ definiere man die *Einhängung* $Sf : SX \longrightarrow SY$ als den Quotienten der Abbildung $f \times \mathrm{id} : X \times I \longrightarrow Y \times I$. Zeigen Sie, dass das Einhängen von Abbildungen zwischen Sphären den Abbildungsgrad erhält.

3. Bestimmen Sie die Homologie folgender CW-Komplexe:

a) Der Quotient der S^2, der durch Identifikation eines Paares antipodaler Punkte entsteht.

b) $S^1 \times (S^1 \vee S^1)$

c) Man entferne das Innere zweier disjunkter offener Scheiben aus dem Inneren der Scheibe D^2 und identifiziere dann die drei entstehenden, positiv orientierten Randkreise über orientierungserhaltende Homöomorphismen.

d) Der Quotient des Torus, $S^1 \times S^1$, der entsteht, indem man auf $S^1 \times \{x_0\}$ Punkte im Abstand $2\pi/m$ und auf $\{x_0\} \times S^1$ Punkte im Abstand $2\pi/n$ identifiziert.

4. Berechnen Sie die Homologie des Quotienten der S^2, der durch Identifikation antipodaler Punkte auf dem Äquator entsteht. Beschreiben Sie die Homologie des Raumes, der analog aus der S^n, $n > 2$, durch antipodale Identifikation auf der "äquatorialen" $(n-1)-$ Sphäre konstruiert werden kann.

Ideen, Lösungen und Diskussion: Freitag, 01.02.08, 10–12 Uhr.

* Diese Aufgaben sind im Text von Hatcher ausgeführt - doch gönnen Sie sich die Übung!