Eva Maria Feichtner September 2001

Komplexe Analysis

Übungen zum Vordiplom

Die folgenden Aufgaben entsprechen ihrem Format nach typischen Prüfungsaufgaben. Die Vordiplomprüfung wird aus vier vergleichbaren Aufgaben bestehen. Solche Aufgaben, die mir für die sehr begrenzte Prüfungszeit zu schwer erschienen, und die nicht zuletzt deshalb auf diesem Übungsblatt und nicht auf dem Prüfungsblatt stehen, habe ich mit einem Stern gekennzeichnet. Kontrollergebnisse finden Sie am Ende der Aufgabenliste.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei allen jetzt für Sie anstehenden Prüfungen!

1. (a) Finden Sie einen Funktionsausdruck, der in der komplexen Ebene die Spiegelung an der imaginären Achse beschreibt.

   (b) Es seien drei Punkte a, b und c in der komplexen Ebene gegeben. Zeigen Sie, dass diese Punkte dann und nur dann Eckpunkte eines rechwinkligen Dreiecks mit rechtem Winkel bei c sind, wenn gilt:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a-c}{b-c}\right) \;=\; 0\,.$$

2. (a) Beschreiben Sie eine Funktion, die das Segment

$$\{\, r\, e^{i\,\varphi} \mid 0 \leq r\,,\; 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \,\}$$

   abbildet auf die Menge

$$\{\, r\, e^{i\,\varphi} \mid 0 \leq r \leq 1\,,\; 0 \leq \varphi \leq \pi \,\}\,.$$

   Skizzieren Sie zuvor die angegebenen Punktmengen in $\mathbb{C}$.

   (b)* Es sei K Teilmenge in $\mathbb{C}$ gegeben durch

$$K \;=\; \{\, z \mid |\, z + i/2\,| \;<\; 1/2 \}\,.$$

   Skizzieren Sie K und das Bild von K in $\mathbb{C}$ unter der Abbildung

$$\Phi \;:\; z \;\longmapsto 1/z\,.$$

3. (a) Bestimmen Sie Pole und zugehörige Residuen folgender Funktionen:

$$(i)\ \frac{1}{z^2-4} \qquad (ii)\ \frac{e^z}{z^3} \qquad (iii)^*\ \frac{1}{\sin z} \quad \text{in } z_0 = 0.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{dz}}{1+z^4}\,,$$

wobei Γ den positiv umlaufenen Kreis mit Radius 2 um $z=1$ bezeichnet.

4.* Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx\,.$$

Anleitung: Nutzen Sie zuerst die Symmetrieeigenschaft des Integranden aus. Ersetzen Sie dann den Zähler durch e^{ix}. Begründen Sie diesen Schritt. Sie haben das Integral damit auf eine Form gebracht, für die sich eine Standardmethode geradezu anbietet.

5. (a) Zeigen Sie, dass für das Faltungsprodukt der Funktionen

$$\begin{array}{lllll} f: & [0,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C}\,, & x \longmapsto x^a \\ g: & [0,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C}\,, & x \longmapsto x^b\,, \qquad a,b\in\mathbb{C}\,, \end{array}$$

folgende Identität erfüllt ist:

$$(f\star g)\,(x) \;=\; x^{a+b+1}\int_0^1 (1-t)^a t^b\,\mathrm{dt}\,.$$

(b) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten folgender Funktionen:

$$\begin{array}{lll} (i) & \sinh(\omega\,t)\,, & \omega\in\mathbb{R} \\ (ii) & e^{a\,t}\sin(\omega\,t)\,, & a\in\mathbb{C},\ \omega\in\mathbb{R} \\ (iii) & t^n\,e^{\omega\,t} & n\in\mathbb{N},\ \omega\in\mathbb{R}\,. \end{array}$$

6. Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mithilfe von Laplace-Transformation:

$$y'' + 4y' + 3y \;=\; 0\,, \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=2\,.$$

Kontrollergebnisse:

Vorsicht - zwar habe ich die Aufgaben sorgfältig durchgerechnet, doch kann sich trotzdem ein Fehler einschleichen. Vertrauen Sie ruhig auch Ihren eigenen Ergebnissen!

1. (a) $z \longmapsto -\bar{z}$

   (b) $\overline{ac}\perp\overline{bc} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Arg}\left(\frac{a-c}{b-c}\right)$ ist rein imaginär $\;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re}\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = 0\,.$

2. (a) $z \longmapsto \frac{1+iz^2}{1-iz^2}$, vgl. Skizze im Skript, S. 55.

   (b) $\Phi(K) = \{\,z\,|\,\operatorname{Im} z > 1\}$

3. (a) (i) einfache Pole in ± 2, $\operatorname{res}\left(\frac{1}{z^2-4}\,|\,2\right) = \frac{1}{4}$, $\operatorname{res}\left(\frac{1}{z^2-4}\,|\,-2\right) = -\frac{1}{4}$

(ii) Pol der Ordnung 3 in 0, $\operatorname{res}\left(\frac{e^z}{z^3}\,|\,0\right) = 1/2$. (Koeffizient vor z^{-1} in der Laurent-Entwicklung um 0!)

(iii) einfacher Pol (Reihenentwicklung im Nenner, z^{-1} ausklammern, Rest in geometrische Reihe umschreiben), $\operatorname{res}\left(\frac{1}{\sin z}\,|\,0\right) = 1$ (wieder: Koeffizient vor z^{-1} in Laurent-Entwicklung.)

(b) $\int_\Gamma \frac{\mathrm{dz}}{1+z^4} = 0$, Residuensatz.

4. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2\,e}$; Integral erst laut Hinweis auf die Form $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{dz}$ bringen, dann Residuensatz anwenden.

5. (a) nachrechnen ...

(b) (i) $\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$

(ii) $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

(iii) $n!\,\frac{1}{(s-\omega)^{n+1}}$

6. $y(t) = \frac{5}{2}\,e^{-t} - \frac{3}{2}\,e^{-3t}$