Michaela Abele
Seminar: Topologie von Konfigurationsräumen
Prof. Dr. Eva-Maria Feichtner, SS 2006

Zusammenfassung

der wichtigsten Begriffe und Ergebnisse

des Vortrags über M. Farbers

"Topological Complexity of Motion Planning"

Zu einem Konfigurationsraum X betrachte $PX = \{\gamma : [0,1] \longrightarrow X, stetig\}$.
"Motion Planning" : Suche $s : X \times X \longrightarrow PX$, stetig in beiden Einträgen, wobei $s(A,B) = \gamma_{A,B}$ mit $\gamma_{A,B}(0) = A$, $\gamma_{A,B}(1) = B$ für $A, B \in X$.
(X stets wegzusammenhängend!)

- Motion Planning $s : X \times X \longrightarrow PX$ existiert $\Longleftrightarrow$ X ist kontrahierbar.

Topologische Komplexität
TC(X):= min $\{$k $\in \mathbb{N}; X \times X = U_1 \cup ... \cup U_k;\ U_i$ offen (bzgl komp.-off.-Tpl)$\}$, wobei für alle $i \leq k$ stetiges motion planning $s_i : U_i \longrightarrow PX$ existiert. Andernfalls setze TC(X)= ∞.

- TC(X) ist homotopie-invariant.

Kategorie - im Sinne von Lusternik-Schnirelman:
cat(X) := min $\{$k $\in \mathbb{N}; X = Y_1 \cup ... \cup Y_k;$ alle Y_i offen und kontrahierbar in $X\}$.

- X wegzusammenhängend und parakompakt. Dann gilt:
  $cat(X) \leq TC(X) \leq 2cat(X) - 1$.

Kohomologische untere Schranke:
$H^*(X;K)$ ist gradierte K-Algebra mit cup-Produkt als Multiplikation:
$\cup : H^*(X;K) \otimes H^*(X;K) \longrightarrow H^*(X;K)$ (vgl. Vortrag von A. Bächle).
Mit der Multiplikation $(u_1 \otimes v_1) \cdot (u_2 \otimes v_2) = (-1)^{|v_1| \cdot |u_2|}(u_1 \cup u_2) \otimes (v_1 \cup v_2)$ trägt aber andererseits auch das Tensorprodukt $H^*(X;K) \otimes H^*(X;K)$ die Struktur einer gradierten K-Algebra ($|v_i|$=Grad der Kohomologieklasse); die Abbildung $\cup$ ist also ein Homomorphismus zwischen Algebren.
Der Kern des Homomorphismus $\cup$ wird als **Nullteilerideal** von $H^*(X;K)$ bezeichnet; die Länge des längsten nicht-trivialen Produktes in diesem Nullteilerideal nennt man die **Nullteiler-Cup-Länge** von $H^*(X;K)$.

- $TC(X) >$ Nullteiler-Cup-Länge von $H^*(X;K)$.
- $TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y) - 1$.

Beispiele:

1. TC(S^1) = ?
   Beachte: S^1 ist nicht kontrahierbar, also TC(S^1) > 1.
   Definiere s_1 auf $U_1 = \{(A,B) : A \neq -B\} \subset S^1 \times S^1$, indem A entlang des kürzeren Kreisbogens nach B überführt wird; definiere s_2 auf $U_2 = \{(A,B) : A \neq B\} \subset S^1 \times S^1$ durch Orientierung der S^1 und Überführung von A nach B in positiver Richtung.
   $U_1 \cup U_2 = S^1 \times S^1$, somit TC($S^1$) ≤ 2. Insgesamt schließlich TC(S^1)=2.

2. TC(S^n) = ?
   $H_k(S^n)$ verschwindet für alle k $\neq 0$,n. Damit existieren nichttriviale Elemente der Kohomologie nur in Dimensionen 0 und n. Sei $u \in H^n(S^n)$, $1 \in H^0(S^n)$ (neutral; nimmt auf allen 0-Ketten den Wert 1 an). Kernelemente von $\cup$ müssen sich aus u und 1 kombinieren lassen; dies liefert $a = 1 \otimes u - u \otimes 1$ und $b = u \otimes u$ als Erzeuger des Nullteilerideals.
   Wegen $ab = 0$, $b^2 = 0$, $a^2 = 0$ für ungerades n, $a^2 \neq 0$ und $a^3 = 0$ für gerades n, ist die Nullteiler-Cup-Länge 2 für gerades n bzw. Nullteiler-Cup-Länge 1 für ungerades n. Somit TC(S^n) > 1 bzw. 2 je nach Parität von n.
   Falls n ungerade:
   $U_1 = \{(A,B) : A \neq -B\} \subset S^n \times S^n$; kürzeste Verbindung von A nach B liefert $s_1(A,B)$.
   $U_2 = \{(A,B) : A \neq B\} \subset S^n \times S^n$; $s_2(A,B)$ sei Weg $A \to -B \to B$, wobei der erste Teil A nach $-B$ via s_1 überführt und der zweite Teil des Weges entlang eines nichtverschwindenden tangentialen Vektorfeldes verläuft (ein solches Vektorfeld existiert für ungerades n).
   $U_1 \cup U_2 = S^n \times S^n \quad \Longrightarrow$ TC(S^n) ≤ 2; insgesamt also TC(S^n)=2.
   Falls n gerade:
   U_1 wie im ungeraden Fall.Für U_2 existiert nun aber kein nichtverschwindendes tangentiales Vektorfeld; wähle also tangentiales Vektorfeld, das nur in einem Punkt B_0 verschwindet.
   Damit $U_2 = \{(A,B) : A \neq B, B \neq B_0\} \subset S^n \times S^n$; s_2 wie oben.
   Sei $C \in S^n \setminus \{\pm B_0\}$, $Y = S^n \setminus C$. Dann ist Y diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$, insbesondere kontrahierbar, also existiert motion planning auf $Y \times Y =: U_3$.
   $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = S^n \times S^n \quad \Longrightarrow$ TC(S^n) ≤ 3; insgesamt also TC(S^n)=3.

3. Roboterarm: TC($(S^m)^{\times n}$) = ?
   Schritt 1: TC($(S^m)^{\times n}$) $\leq n\cdot$ TC(S^m) - (n-1), mit obigen Ergebnissen ist TC also nach oben beschränkt durch $n+1$ für ungerades m bzw. durch $2n+1$ für gerades m.
   Schritt 2: Für jede Komponente ${S_i}^m$ betrachte $a_i \in H^m((S^m)^{\times n}; K)$, welche durch jeweilige Projektion π_i auf u_i (vgl. u in Bsp. 2) abgebildet werden.
   $0 \neq \prod_{i=1}^{n} (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) \in$ Nullteilerideal, d.h. Nullteiler-Cup-Länge $\geq n$ bzw. TC($(S^m)^{\times n}$) $> n$. Für gerades m dürfen Faktoren analog zu Bsp. 2 sogar quadriert werden; in diesem Fall dann TC($(S^m)^{\times n}$) $> 2n$.
   Insgesamt: Für gerades m gilt TC($(S^m)^{\times n}$) $= 2n+1$,
   für ungerades m gilt TC($(S^m)^{\times n}$) $= n+1$.