Grad irreduzibler Darstellungen

by Arvin

2. Dezember 1999

1 Algebraisch ganze Zahlen

Ziel: Wir wollen zeigen, dass $\chi(g)$, $g \in G$, eine algebraisch ganze Zahl ist.

Definition 1.1. Eine komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ heisst eine *algebraisch ganze Zahl*, wenn es $a_i \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$\alpha^{n+1} + a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Beispiele für algebraisch ganze Zahlen sind $\sqrt{2}$, i, oder allgemeiner $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda^n = 1$, für ein $n \in \mathbb{N}$, und $m \in \mathbb{Z}$.

Lemma 1.1. *Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent.*

- $\alpha \in \mathfrak{A}$
- *Es gibt einen Unterring* $\mathfrak{R} \subset \mathbb{C}$, *so dass* $\alpha \in \mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{R}$ *ist endlich erzeugt als abelsche Gruppe.*

Bemerkung 1.1. $\mathfrak{A} := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ ist eine algebraisch ganze Zahl}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.

Lemma 1.2. $\mathfrak{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ *!*

Beweis. Es ist klar, dass $\mathbb{Z} \subset (\mathfrak{A} \cap \mathbb{Q})$.
Mit jedem $a \in \mathfrak{A} \cap \mathbb{Q}$ ist auch $-a \in \mathfrak{A} \cap \mathbb{Q}$. Also reicht es nur $a \geq 0$ zu betrachten.
Sei nun $\frac{p}{q} \in \mathfrak{A} \cap \mathbb{Q}$, mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $(p,q) = 1$ (teilerfremd, sonst kürze), und $a_i \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{n+1} + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow p^{n+1} = -a_n p^n q - \cdots - a_1 p q^n - a_0 q^{n+1} = mq, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

D.h. aber $p^{n+1} \equiv 0 \mod q$. Dies ist im Widerspruch zu $(p,q) = 1$. □

Satz 1.1. *Sei ρ Darstellung einer endlichen Gruppe G mit Charakter χ. Dann ist $\chi(g)$ für alle $g \in G$ eine algebraisch ganze Zahl.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ die Ordnung von g, $g \in G$, und $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $\rho(g)$. Dann ist $\lambda_i^n = 1 \Rightarrow \lambda_i \in \mathfrak{A}$. Somit folgt

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{k} n_i\lambda_i \in \mathfrak{A}, \qquad n_i \in \mathbb{N}\text{: Vielfachheit von } \lambda_i.$$

□

2 Hilfslemmas

Ziel: Einige Hilfsmittel bereitstellen für die nächsten Beweise.
Im folgenden seien $CL(g_i)$, $i \in \{1, \dots, r\}$, die Konjugationsklassen $\{hg_ih^{-1} \mid h \in G\}$ von G.

Lemma 2.1. *Für alle irreduziblen Darstellungen mit Charakter χ und alle $i \in \{1, \dots, r\}$ gibt es ein $\omega_\chi^i \in \mathfrak{A}$, so dass*

$$|CL(g_i)|\chi(g_i) = \omega_\chi^i \chi(1)$$

Beweis. Sei χ der Charakter einer irreduziblen Darstellung von G.

$$h\left(\sum_{g\in CL(g_i)} g\right)h^{-1} = \sum_{g\in CL(g_i)} hgh^{-1} = \sum_{g\in CL(g_i)} g, \quad \forall h \in G.$$

D.h. $\sum_{g\in CL(g_i)} g$ ist G-linear. Also ist nach Lemma von Schur

$$\sum_{g\in CL(g_i)} g = \omega_\chi^i 1_V,\ \omega_\chi^i \in \mathbb{C} \Rightarrow |CL(g_i)|\chi(g_i) = \text{Spur}\left(\sum_{g\in CL(g_i)} g\right) = \text{Spur}\ (\omega_\chi^i 1_V) = \omega_\chi^i \chi(1).$$

Noch zu zeigen, dass ω_χ^i eine algebraisch ganze Zahl ist.
Betrachte hierzu die endlich erzeugte Gruppe $\mathfrak{R} := \left\langle \{\omega_\chi^i\}_{i=1}^r \right\rangle \subset \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{g\in CL(g_i)} g\right)\left(\sum_{h\in CL(g_j)} h\right) &= \sum_{g\in CL(g_i)}\left(\sum_{h\in CL(g_j)} gh\right) \\
&= \sum_{k=1}^r m_k \left(\sum_{g\in CL(g_k)} g\right), \\
\text{mit } m_k &= |g_k| := |\{gh \mid gh = g_k,\ g \in CL(g_i) \text{ und } h \in CL(g_j)\}|.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\omega_\chi^i \omega_\chi^j = \sum_{k=1}^r m_k \omega_\chi^k, \quad i, j \in \{1, \dots, r\}.$$

D.h. $(\mathfrak{R}, +, \cdot)$ ist ein Ring, der als abelsche Gruppe endlich erzeugt ist, und ω_χ^i ist Element von $\mathfrak{R}$. Somit ist ω_χ^i eine algebraisch ganze Zahl. □

Bemerkung 2.1. Sei ρ_1 Darstellung von G_1 mit Darstellungsraum V_1 und ρ_2 die von G_2 mit Darstellungsraum V_2.
So definiert $\rho_1 \otimes \rho_2$ eine Darstellung von $G_1 \times G_2$ mit Darstellungsraum $V_1 \otimes V_2$.

Lemma 2.2. *Seien G_1 und G_2 Gruppen mit Darstellungen ρ_1 und ρ_2. Sind ρ_1 und ρ_2 irreduzibel, so ist auch $\rho_1 \otimes \rho_2$ irreduzibel.*

Beweis. Seien χ_1 und χ_2 die entsprechenden Charaktere von ρ_1 und ρ_2, χ der Charakter der Produktdarstellung $\rho_1 \otimes \rho_2$.

$$\sum_{(g,h)\in G_1\times G_2} |\chi(g,h)|^2 = \sum_{(g,h)\in G_1\times G_2} |\chi_1(g)|^2|\chi_2(h)|^2 = \sum_{g\in G_1} |\chi_1(g)|^2 \sum_{h\in G_2} |\chi_2(h)|^2 = |G_1||G_2|.$$

D.h. $< \chi, \chi >= 1$, also ist $\rho_1 \otimes \rho_2$ irreduzibel. □

3 Grade irreduzibler Darstellungen

Ziel: Die Einschränkung der möglichen irreduziblen Charaktere χ_i einer Gruppe G.

Satz 3.1. *Der Grad eines irreduziblen Charakters χ teilt die Gruppenordnung $|G|$, d.h.*

$$\chi(1)||G|.$$

Beweis. Sei χ ein irreduzibler Charakter der Gruppe G und $CL(g_i), i \in \{1, \dots, r\}$, die Konjugationsklassen von G. Dann ist

$$1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} |CL(g_i)|\chi(g_i)\overline{\chi}(g_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} |CL(g_i)|\chi(g_i)\chi(g_i^{-1}),$$

denn χ ist eine Klassenfunktion.
Nun ist aber $|CL(g_i)|\chi(g_i) = \omega_\chi^i \chi(1)$ nach Lemma 2.1, wobei $\omega_\chi^i \in \mathfrak{A}$.

$$1 = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{i=1}^{r} \omega_\chi^i \chi(g_i^{-1}) \Leftrightarrow \frac{|G|}{\chi(1)} = \sum_{i=1}^{r} \omega_\chi^i \chi(g_i^{-1}) \in \mathfrak{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z},$$

Also teilt $\chi(1)$ die Gruppenordnung $|G|$. □

Satz 3.2. *Der Grad eines irreduziblen Charakters χ teilt sogar den Index des Zentrums $Z(G)$ in G, d.h.*

$$\chi(1)|(G : Z(G)).$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$, ρ eine irreduzible Darstellung von G mit Charakter χ und $s, t \in Z(G)$.

$$\rho(g)\rho(s) = \rho(gs) = \rho(sg) = \rho(s)\rho(g), \quad \forall g \in G.$$

Mit dem Lemma von Schur folgt also, dass $\rho(s) = \lambda(s)1_V$.

$$\lambda(st)1_V = \rho(st) = \rho(s)\rho(t) = \lambda(s)\lambda(t)1_V \Rightarrow \lambda(st) = \lambda(s)\lambda(t)$$

D.h. $\lambda : Z(G) \mapsto \mathbb{C}$ ist ein Homomorphismus. Betrachte die Gruppe $G \times G \times \cdots \times G = G^m$.
$\rho' := \rho \otimes \rho \otimes \cdots \otimes \rho$ ist eine irreduzible Darstellung auf G^m mit Charakter χ'.
Sei $(s_1, s_2, \cdots, s_m) \in Z(G)^m$ $(= Z(G^m))$. So ist analog wie oben

$$\rho'(s_1, s_2, \cdots, s_m) = \lambda(s_1, s_2, \cdots, s_m)1_{V\otimes V \otimes \cdots \otimes V}, \text{ wobei}$$

$$\lambda(s_1, s_2, \cdots, s_m) = \lambda(s_1)\lambda(s_2)\cdots\lambda(s_m) = \lambda(s_1 s_2 \cdots s_m) \in \mathbb{C}.$$

Sei s die Ordnung von G, c die von $Z(G)$, $n = \chi(1)$ und $H \lhd G^m$ der Normalteiler

$$H := \{(s_1, s_2, \cdots, s_m) \in Z(G)^m \mid s_1 s_2 \cdots s_m = 1\} \subset Z(G)^m.$$

So ist $|H| = c^{m-1}$.
Sei ρ'_H die durch ρ' gegebene Darstellung auf G^m/H mit Charakter χ'_H, ρ'_H irreduzibel. Also

$$\chi'_H(1)||G^m/H| \Leftrightarrow \frac{s^m}{c^{m-1}n^m} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left(\frac{s}{cn}\right)^m \in c^{-1}\mathbb{Z}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Somit ist der Ring $\mathbb{Z}\left[\frac{s}{cn}\right] \subset c^{-1}\mathbb{Z} =< c^{-1} >$ selbst auch endlich erzeugt.

$$\text{Damit ist } \frac{s}{cn} \in \mathfrak{A} \Rightarrow \frac{s}{cn} \in \mathfrak{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$$

□

Anwendung. Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p^2$, wobei p eine Primzahl ist. Dann muss G abelsch sein!

Beweis. G ist abelsch gdw. jede irreduzible Darstellung χ von G Grad 1 hat.
Sei also χ irreduzibel.

$$\chi(1)||G| = p^2 \Rightarrow \chi(1) \in \{1, p, p^2\}$$

Aus der Gradgleichung folgt

$$p^2 = |G| = a + b \cdot p^2 + c \cdot p^4, \quad a, b, c \in \mathbb{N} \text{ mit } a \neq 0.$$

$$\Rightarrow b = c = 0 \text{ und } a = |G|.$$

Somit ist G abelsch. □