Der Satz von Brauer

Beat Steiner

2. Februar 2000

1 Der Charakterring einer Gruppe

Sei G eine endliche Gruppe. $\xi_1, \dots, \xi_s$ seien die (paarweise inäquivalenten) irreduziblen Darstellungen von G, $\chi_1, \dots, \chi_s$ die dazugehörigen Charaktere.

1.1 Definition
Der *Charakterring von G* ist die Menge der $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen der χ_i:

$$Ch(G) := \bigoplus_{i=1,\dots,s} \mathbb{Z}\chi_i$$

1.2 Bemerkung

- $Ch(G)$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}G_{\mathrm{K}}$, des Ringes der Klassenfunktionen auf G.
- Die Elemente von $Ch(G)$ heissen *verallgemeinerte Charaktere von G*.
- Jedes $\phi \in Ch(G)$ hat eine eindeutige Darstellung $\phi = \sum_{i=1}^{s} a_i\chi_i$, wobei $a_i \in \mathbb{Z}$.
- $\phi \in Ch(G)$ ist ein Charakter (im engeren Sinne) genau dann, wenn $\phi = \sum_{i=1}^{s} a_i\chi_i$, mit nichtnegativen $a_i \in \mathbb{Z}$.

2 Induzierte Charaktere

2.1 Definition
Sei H eine Untergruppe von G, σ eine Darstellung von H mit Charakter ψ. Der *induzierte Charakter von ψ* ist der Charakter der induzierten Darstellung $Ind_H^G(\sigma)$.
Schreibweise: $Ind_H^G(\psi)$ oder ψ^G.

2.2 Bemerkung

- $\psi \in Ch(H), H \leq G$. Dann ist $\psi^G \in Ch(G)$
- $\psi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{a \in G \\ a^{-1}ga \in H}} \psi(a^{-1}ga)$
- Obige Formel gibt einen Homomorphismus $Ind_H^G : Ch(H) \to Ch(G)$.
- Genauer: $Ind_H^G : \mathbb{C}H_K \to \mathbb{C}G_K$.
- Induktion ist transitiv:
  $K \leq H \leq G,\ \phi \in Ch(K) \ \Rightarrow\ \phi^G = (\phi^H)^G$

2.3 Bemerkung
Umgekehrt hat man einen Homomorphismus $Res_H^G : \mathbb{C}G_K \to \mathbb{C}H_K$.

Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Untergruppen von G.

2.4 Definition
$\mathcal{I}_{\mathcal{F}}(G) := \{ \sum a_i \phi_i^G \ :\ \phi_i \in Ch(H_i),\ H_i \in \mathcal{F},\ a_i \in \mathbb{Z} \}$
$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(G) := \{ \phi \in \mathbb{C}G_K :\ \phi_H \in Ch(H)\ \forall H \in \mathcal{F} \}$

2.5 Lemma

1. $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}(G) \subseteq Ch(G) \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(G) \subseteq \mathbb{C}G_K$
2. $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(G)$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}G_K$.
3. $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}(G)$ ist ein Ideal in $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(G)$.

Es stellt sich nun die Frage, für welche Familien $\mathcal{F}$ das Ideal $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}(G)$ gleich dem ganzen Ring $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(G)$ ist. Die Sätze von Brauer und Green geben hinreichende resp. notwendige Bedingungen dafür.

3 Elementare und quasi-elementare Gruppen

3.1 Definition
Eine Gruppe G heisst *p-elementar* (p eine Primzahl), falls G das direkte Produkt $G = Z \times P$ einer p-Gruppe P mit einer zyklischen Gruppe Z ist, und p die Ordnung von Z nicht teilt.
Eine Gruppe G heisst *elementar*, falls G p-elementar ist für eine Primzahl p. Wir bezeichnen die Menge aller elementaren Untergruppen einer Gruppe G mit $\mathcal{E}(G)$ oder einfach $\mathcal{E}$.

3.2 Definition
Eine Gruppe G heisst *p-quasielementar* (p prim), falls G einen zyklischen Normalteiler $Z \trianglelefteq G$ enthält, so dass G/Z eine p-Gruppe ist und p die Ordnung von Z nicht teilt.
Eine Gruppe G heisst *quasielementar*, falls G p-quasielementar ist für eine Primzahl p.
Wir bezeichnen die Menge aller quasielementaren Untergruppen einer Gruppe G mit $\mathcal{E}'(G)$ oder einfach $\mathcal{E}'$.

3.3 Bemerkung

- Elementare Gruppen sind quasielementar.
- Untergruppen von (quasi-)elementaren Gruppen sind (quasi-)elementar.

4 Der Satz von Brauer

4.1 Satz (Brauer)

$$1_G \in \mathcal{I}_{\mathcal{E}}(G)$$

4.2 Korollar
$\mathcal{I}_{\mathcal{E}}(G) = Ch(G) = \mathcal{R}_{\mathcal{E}}(G)$

4.3 Korollar

1. Jeder (verallgemeinerte) Charakter von G ist $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Charakteren induziert von elementaren Untergruppen von G.
2. Eine Klassenfunktion $\phi \in \mathbb{C}G_K$ ist ein verallg. Charakter von G genau dann, wenn $\phi_E \in Ch(E)$, $\forall E \in \mathcal{E}(G)$.

Der erste Teil kann mit dem folgenden Lemma noch präzisiert werden:

4.4 Lemma
Jeder irreduzible Charakter einer elementaren Gruppe G ist induziert von einem linearen Charakter einer elementaren Untergruppe von G.

4.5 Korollar (Brauer)
Jeder Charakter von G ist $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Charakteren, die von linearen Charakteren von elementaren Untergruppen von G induziert werden.

Der folgende Satz von Green liefert eine Art Umkehrung des Satzes von Brauer, und zeigt, dass die Wahl der elementaren Untergruppen nicht beliebig war:

4.6 Satz (Green)
Sei G eine Gruppe, $\mathcal{F}$ eine Familie von Untergruppen von G, so dass $Ch(G) = \mathcal{I}_{\mathcal{F}}(G)$. Dann gibt es zu jeder elementaren Untergruppe E von G ein Konjugiertes E^g in $\mathcal{F}$.

5 Beweis des Satzes von Brauer

5.1 Lemma (Banaschewski)
Sei S eine endliche Menge, R ein Unterrng (möglicherweise ohne Eins) von $\mathbb{Z}^S$. Falls 1_S nicht in R liegt, dann gibt es ein $x \in S$ und eine Primzahl p, so dass $p \mid f(x)$, für alle $f \in R$.

5.2 Definition
$P_{\mathcal{F}}(G) := \{ \sum a_i 1_{H_i}^G \ : \ a_i \in \mathbb{Z},\ H_i \in \mathcal{F} \}$

5.3 Bemerkung
$P_{\mathcal{E}'}(G)$ ist ein Rng.

5.4 Lemma
Sei $g \in G$, p prim. Dann gibt es eine p-quasielementare Untergruppe H von G, so dass $p \nmid (1_H)^G(g)$.

5.5 Satz (Solomon)
$1_G \in P_{\mathcal{E}'}(G)$

5.6 Lemma
Sei $G = CP$ wobei $C \lhd G$, P eine p-Gruppe und $p \nmid \ \mid C \mid$. Sei λ ein linearer Charakter von C, der invariant in G ist (im Sinne von: $\lambda(ghg^{-1}) = \lambda(h), \forall h \in C,\ g \in G$). Weiter sei $\mathbf{C}_C(P) \subseteq ker\lambda$. Dann gilt $\lambda = 1_C$.

5.7 Lemma
Sei G quasielementar, aber nicht elementar. Dann gilt $1_G = \sum a_i(\psi_i)^G$, wobei $a_i \in \mathbb{Z},\ \psi_i \in Ch(H_i),\ H_i \lneqq G$.