Induzierte Darstellungen II

Carlo Albert

25. Januar 2000

1 Induzierte und restringierte Darstellungen

Erinnerung: Sei G Gruppe, $H \leq G$, W Darstellung von H. Dann heisst V die durch W induzierte Darstellung, falls

$$V = \bigoplus_{s \in G/H} sW$$

Schreibweise:

$$V = Ind_H^G(W)$$

Folgende Definition, mit deren Hilfe sich vieles einfacher formulieren lässt, ist äquivalent:

Definition 1.1 $Ind_H^G(W) = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ *mit* $e_g(e_h \otimes w) = e_{gh} \otimes w$

Mit dieser Definition ist die *Existenz* der induzierten Darstellung unmittelbar klar. Aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes folgt eine universelle Eigenschaft der induzierten Darstellung, woraus deren *Eindeutigkeit* folgt.
Durch Induktion wird die Dimension des Darstellungsraumes vergrössert:

$$dim(Ind_H^G(W)) = dim W |G : H|$$

Definition 1.2 *Der* $\mathbb{C}[H]$*-Modul, welcher aus der Einschränkung eines* $\mathbb{C}[G]$*-Moduls V auf den Untermodul* $\mathbb{C}[H]$ *hervorgeht bezeichnet man als* Restriktion:

$$Res_H^G V$$

Die Restriktion darf nicht ohne weiteres als Umkehrung der Induktion verstanden werden, das ersieht man schon allein daraus, dass bei der Restriktion der Darstellungsraum nicht verändert wird. Genauer gilt:

$$Ind_H^G(Res_H^G(U)) = U \otimes Ind_H^G 1$$

Über die Umkehrung gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 1.3 *Seien H, K Untergruppen einer Gruppe G, $K\backslash G/H$ Menge der Klassen KsH, $s \in S$ ein Repräsentantensystem, ρ eine Darstellung von H. Für $s \in S$ definiert $\rho^s(x) = \rho(s^{-1}xs)$, $x \in sHs^{-1} \cap K =: H_s$ eine Darstellung von H_s. Dann gilt:*

$$Res_K^G(Ind_H^G(\rho)) = \bigoplus_{s \in K\backslash G/H} Ind_{H_s}^K(\rho^s)$$

Seien V und $Ind_H^G W$ Darstellungen von G und W sowie $Res_H^G V$ Darstellungen von $H \leq G$. Aus der universellen Eigenschaft der induzierten Darstellung folgt sofort die eindeutige Fortsetzbarkeit von $\mathbb{C}[H]$-Homomorphismen zu $\mathbb{C}[G]$-Homomorphismen:

$$Hom^H(W, ResV) \backsimeq Hom^G(IndW, V)$$

Für die Dimensionen folgt (mit der Notation $\langle X, Y\rangle_G = dim(Hom^G(X,Y))$):

$$\langle W, ResV\rangle_H = \langle IndW, V\rangle_G$$

was äquivalent zur Frobenius'schen Reziprozitätsformel für die entsprechenden Charaktere ist:

$$\langle \chi_W, \chi_{ResV}\rangle = \langle \chi_{IndW}, \chi_V\rangle$$

In der Sprache der Kategorien sind Ind und Res *adjungierte Funktoren.*

Bemerkung 1.4 Die Assoziativität des Tensorproduktes übersetzt sich zur Transitivität der Induktion:

$$Ind_G^K(Ind_H^G(W)) \backsimeq Ind_H^K(W).$$

2 Irreduzibilität induzierter Darstellungen

Satz 2.1 (Mackey's Irreduzibilitätskriterium)
Die durch $\rho : H \longrightarrow GL(W)$ induzierte Darstellung

$$Ind_H^G(\rho)$$

ist genau dann irreduzibel, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. *ρ ist irreduzibel*
2. *Für jedes $s \in G - H$ sind die beiden folgenden Darstellungen von $H_s := sHs^{-1} \cap H$ disjunkt (d.h. haben keine gemeinsame irreduzible Komponente):*

   $$Res_{H_s}^H(\rho)$$

   und

   $$\rho^s : \ H_s \longrightarrow GL(W), \text{definiert durch } \rho^s(x) = \rho(s^{-1}xs).$$

Der Beweis verwendet die Frobeniusformel und den Satz 1.3.

3 Teilbarkeitsaussage über Grade irreduzibler Darstellungen

Sei χ der Charakter einer irreduziblen Darstellung. Bisher haben wir die folgenden Bedingungen für die Grade der Darstellung kennengelernt:

1. $\chi(1) \mid |G|$
2. $\chi(1) \mid |G : Z(G)|$
3. $\chi(1) \leq |G : A|,\ A \leq G$ *abelsch*

$\chi(1)$ ist jedoch i. allg. kein Teiler von $|G : A|$, es sei denn man fordert, dass A in G *normal* ist. Dies folgt als Korollar aus dem folgenden Satz, den wir auch im nächsten Abschnitt brauchen werden.

Satz 3.1 *Sei A Normalteiler von G, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine irreduzible Darstellung von G. Dann gilt eine der beiden folgenden Aussagen:*

1. *Es gibt eine echte Untergruppe H von G, die A enthält und eine irreduzible Darstellung σ von H, sodass ρ durch σ induziert wird.*
2. *Die Restriktion von ρ auf A ist isotypisch (d.h. direkte Summe irreduzibler äquivalenter Darstellungen)*

Bemerkung 3.2 Falls A abelsch ist, gilt nach dem Schur'schen Lemma: (2) $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A:\ \rho(a) = \lambda_a id.$

Korollar 3.3 *Sei A abelscher Normalteiler von G und χ der Charakter einer irreduziblen Darstellung von G. Dann gilt:*

$$\chi(1) \mid |G : A|$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist diese Aussage stärker als die bisherigen Teilbarkeitsaussagen.

4 Darstellung überauflösbarer Gruppen

Erinnerung: Eine Gruppe heisst *auflösbar*, falls sie eine abelsche Normalreihe mit trivialem letztem Element besitzt, d.h.:

$$G \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq ... \trianglerighteq \{1\},\ G_{i+1}/G_i \ abelsch.$$

Definition 4.1 *G heisst* überauflösbar, *falls G eine zyklische Normalreihe mit trivialem letztem Element besitzt und alle Glieder der Reihe normal in G sind.*

Satz 4.2 *Jede p-Gruppe ist überauflösbar.*

Der folgende Satz zeigt, dass irreduzible Darstellungen überauflösbarer Gruppen durch sehr einfache Darstellungen induziert werden. In die Darstellung überauflösbarer Gruppen fliesst also neben "wenig Vektorraumstruktur" bloss Gruppenstruktur.

Satz 4.3 *Jede irreduzible Darstellung einer überauflösbaren Gruppe wird induziert durch eine eindimensionale Darstellung einer Untergruppe von G.*