Irreduzible Darstellungen der symmetrischen Gruppe

Carsten Mayer

Seminarvortrag vom 10.01.2000

Erinnerung:

Sei V ein Vektorraum der Dimension $|G|$ und $\{e_g\}_{g\in G}$ eine Basis von V, die durch die Gruppenelemente indiziert ist. Dann heißt die Abbildung:

$$G \to GL(V)$$

$$g \mapsto \rho_g$$

$$mit \qquad \rho_g(e_s) = e_{gs} \quad \forall s \in G$$

die reguläre Darstellung von G.

1 Die Gruppenalgebra

1.1 Definition

Definiere auf dem Darstellungsraum der regulären Darstellung eine Multiplikation durch

$$e_g \cdot e_h = e_{gh} \qquad \forall g, h \in G$$

und lineare Fortsetzung. Die so erhaltene Algebra heißt *Gruppenalgebra*.

Die Elemente der Gruppen-Algebra $\mathbb{C}G$ sind von der Gestalt :

$$\sum_{g\in G} a_g e_g \quad \text{mit} \quad a_g \in \mathbb{C}$$

1.2 Satz

Seien $\rho_i : G \to Aut(W_i)$ die irreduziblen Darstellungen der Gruppe G, dann gilt:

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus End(W_i)$$

2 Irreduzible Darstellungen der $\mathbb{S}_d$

2.1 Bemerkung:

Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe ist gleich der Anzahl ihrer Konjugiertenklassen. Außerdem gilt nun in der symmetrischen Gruppe $\mathbb{S}_d$, daß zwei Elemente genau dann konjugiert sind, wenn sie, notiert in der Zyklenschreibweise, durch die Länge der aufretenden Zyklen dieselbe Partition von d induzieren. Man schreibt für solche Partitionen:

$$\lambda \vdash d$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \quad \text{mit} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1, \quad \text{wobei}$$

$$k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = d$$

.

2.2 Definition

Das zur Partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ von d gehörende Young-Diagramm ist ein Diagramm mit λ_i Kästchen in der i-ten Zeile.
Die konjugierte Partition λ' zu λ ist die Partition, die zum diagonal gespiegelten Young-Diagramm von λ gehört.
Ein mit den Zahlen 1,2, ... , d ausgefülltes Young Diagramm heißt Young-Tableau.

2.3 Beispiel

Das Young-Diagramm der Partition $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ von 8 ist:

$$\begin{array}{l|c|c|c|}
\cline{2-4}
\lambda_1 & & & \\
\cline{2-4}
\lambda_2 & & & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-3}
\lambda_3 & & & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-3}
\lambda_4 & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

Die konjugierte Partition λ' zu λ ist:

$$\lambda' = (4, 3, 2)$$

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|}
\cline{2-5}
\lambda'_1 & & & & \\
\cline{2-5}
\lambda'_2 & & & & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-4}
\lambda'_3 & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

Das kanonische Young-Tableau zur Partition λ ist:

$$\begin{array}{l|c|c|c|}
\cline{2-4}
\lambda_1 & 1 & 2 & 3 \\
\cline{2-4}
\lambda_2 & 4 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-3}
\lambda_3 & 6 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-3}
\lambda_4 & 8 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

2.4 Definition

Sei λ Partition von d. Für die folgenden Definitionen beziehen wir uns auf das kanonische Young-Tableau zur Partition λ. Es seien:

$$P = P_\lambda = \{g \in \mathbb{S}_d | \text{Reihen sind invariant unter g}\}$$

$$Q = Q_\lambda = \{g \in \mathbb{S}_d | \text{Spalten sind invariant unter g}\}$$

$$a_\lambda := \sum_{g \in P} e_g \quad \text{und} \quad b_\lambda := \sum_{g \in Q} sgn(g) e_g$$

Weiter sei:

$$c_\lambda := a_\lambda \cdot b_\lambda$$

c_λ heißt Young-Symmetrierer.

2.5 Theorem

Sei λ Partition von d, $c_\lambda \in \mathbb{C}\mathbb{S}_d$ wie oben, dann gilt: Es gibt ein $n_\lambda \in \mathbb{C}$ mit $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ und für die Abbildung

$$\_ \cdot c_\lambda : \mathbb{C}\mathbb{S}_d \to \mathbb{C}\mathbb{S}_d$$

$$x \mapsto x \cdot c_\lambda$$

gilt:

$$Im(\mathbb{C}\mathbb{S}_d) =: V_\lambda$$

ist eine irreduzible Darstellung von $\mathbb{S}_d$.
Desweiteren kann jede irreduzible Darstellung von $\mathbb{S}_d$ auf diese Art konstruiert werden.

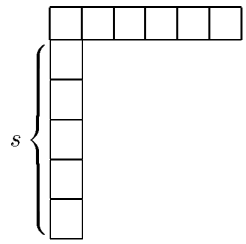
2.6 Satz

Sei U' die alternierende Darstellung und λ' die konjugierte Partition zu λ, dann gilt:

$$V_{\lambda'} = V_\lambda \otimes U'$$

2.7 Satz

Die Standard-Darstellung V gehört zur Partition $\lambda = (d-1, 1)$ von d. Weiterhin gilt, daß $\wedge^s V$, die äussere Potenz der Standarddarstellung, die Darstellung ist, die zu einem Hacken der folgenden Form gehört:



$$\lambda = (d-s, 1, \ldots, 1)$$

3 Beweis des Theorems 2.5

3.1 Notation

In den nun folgenden Sätzen wird sehr häufig die Notation $g \cdot x$ mit $g \in G$ und $x \in \mathbb{C}G$ verwendet. Damit ist natürlich die Multiplikation des zu g gehörenden Basiselements e_g in der Gruppenalgebra mit x gemeint.

$$g \cdot x := e_g \cdot x \quad \forall g \in G, x \in \mathbb{C}G$$

3.2 Lemma

1. Für $p \in P_\lambda$ ist $p \cdot a_\lambda = a_\lambda \cdot p = a_\lambda$.

2. Für $q \in Q_\lambda$ ist $(sgn(q)q) \cdot b_\lambda = b_\lambda \cdot (sgn(q)q) = b_\lambda$.

3. Für alle $p \in P_\lambda, q \in Q_\lambda$ ist $p \cdot c_\lambda \cdot (sgn(q)q) = c_\lambda$.

4. Bis auf Multiplikation mit einem Skalaren ist c_λ das einzige Element in $\mathbb{C}\mathbb{S}_d$ mit der Eigenschaft 3.

3.3 Definition

Seinen λ, μ Partitionen von d. Definiere

$$\lambda > \mu \quad :\Leftrightarrow \text{die erste nichtverschwindende Differenz } \lambda_i - \mu_i \text{ ist positiv.}$$

3.4 Lemma

1. Falls $\lambda > \mu$, dann gilt $a_\lambda \cdot x \cdot b_\mu = 0$ für alle $x \in \mathbb{C}\mathbb{S}_d$. Insbesondere gilt natürlich $c_\lambda \cdot c_\mu = 0$.

2. Für alle $x \in \mathbb{C}\mathbb{S}_d$ gilt: $c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda$ ist ein skalares Vielfaches von c_λ. Insbesondere gilt:
$$c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda \qquad \text{für ein} \quad n_\lambda \in \mathbb{C}$$

3.5 Lemma

1. Jedes V_λ, wie in Theorem 2.5 konstruiert, ist eine irreduzible Darstellung von $\mathbb{S}_d$.

2. Ist $\lambda \neq \mu$, so sind V_λ und V_μ nicht isomorph.

3.6 Lemma

Für n_λ in Lemma 3.4 (2) gilt
$$n_\lambda = \frac{d!}{\dim(V_\lambda)}$$

Da es nun genausoviele Partitionen λ von d wie Konjugiertenklassen der $\mathbb{S}_d$ gibt, müssen die V_λ eine vollständige Menge irreduzibler Darstellungen von $\mathbb{S}_d$ bilden. Dies vervollständigt den Beweis von Theorem 2.5.

4 Über symmetrische Polynome

Wir betrachten den Vektorraum S_d^k der symmetrischen, homogenen Polynome von Grad d in k Variablen. Dieser Raum ist endlichdimensional und besitzt meherere verschiedene Basen.
Seien im folgenden λ und μ Partitionen von d.

4.1 Basen des S_d^k

1. Monome in den elementarsymmetrischen Funktionen E_j:

$$E_\mu = E_{\mu_1} \cdots E_{\mu_l}$$

wobei $k \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_l \geq 0$ und $E_j = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k} x_{i_1} \cdots x_{i_j}$.

2. monomiale symmetrische Polynome

$$M_\lambda = \sum_\alpha X^\alpha$$

wobei über alle $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ Permutation von $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ mit $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0$ summiert wird und $X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$.

3. Schur Polynome

$$S_\lambda = \frac{|x_j^{\lambda_i + k - i}|}{|x_j^{k-i}|}$$

mit $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0$.

4.2 Satz

Sei $P \in S_d^k$, dann gilt:

1.

$$P = \sum_{\lambda \vdash d} [P]_\lambda M_\lambda,$$

wobei $[P]_\lambda$ der Koefizient von $X^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_k^{\lambda_k}$ in P.

2.

$$P = \sum_{\lambda \vdash d} \omega_\lambda(P) S_\lambda,$$

wobei $\omega_\lambda(P) = [\Delta \cdot P]_l$ mit $l = (\lambda_1 + k - 1, \lambda_2 + k - 2, \ldots, \lambda_k)$.

4.3 Definition

Die Koefizienten $K_{\mu\lambda}$, die beim Basiswechsel von den Schurpolynomen zu den monomialen symmetrischen Polynomen auftreten, heißen $KostkaZahlen$.

$$S_\mu = \sum_\lambda K_{\mu\lambda} M_\lambda$$

Es gilt nun das folgende zentrale Lemma:

4.4 Lemma

$$[P]_\lambda = \sum_\mu K_{\mu\lambda} [\Delta \cdot P]_l$$