Induzierte Darstellungen

Fabian Ziltener

Seminarvortrag vom 13.12.1999

1 Definition, Existenz und Eindeutigkeit der induzierten Darstellung

Seien G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G, $\rho_H := \rho\big|_H$ die Einschränkung auf H. Sei $\theta := {\rho_H}^W : H \to \mathrm{GL}(W)$ eine Teildarstellung von ρ_H, d.h. $\theta_h(w) = \rho_H(w)$ für alle $h \in H$, $w \in W$.
Der Vektorraum $\rho_g W$, $g \in G$, hängt nur von der Nebenklasse $\sigma = gH$ von g nach H ab. Wir können daher definieren: $W_\sigma := \rho_g W$ für g beliebig in $\sigma = gH$. Die W_σ werden permutiert durch die ρ_g, $g \in G$. Daher ist die Summe $\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ eine Teildarstellung von V.

Definition 1.1 *Die Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ heisst von der Darstellung $\theta : H \to \mathrm{GL}(W)$ induziert, falls V gleich ist der Summe der W_σ, $\sigma \in G/H$, und falls diese Summe direkt ist, d.h. falls*

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma .$$

Beispiel 1.2 Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ die reguläre Darstellung von G. V hat dann eine Basis $(e_g)_{g \in G}$ und es gilt $\rho_g e_{g'} = e_{gg'}$ für alle $g, g' \in G$.
Sei W der Unterraum von V mit Basis $(e_h)_{h \in H}$. Die Darstellung $\theta = {\rho_H}^W$ von H auf W ist die reguläre Darstellung von H, und ρ ist induziert von θ.

Lemma 1.3 *Seien $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ und $\theta : H \to \mathrm{GL}(W)$ Darstellungen und ρ induziert von θ. Sei $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ eine weitere Darstellung von G, und sei $f : W \to V'$ linear, sodass $f(\theta_h(w)) = \rho'_h(f(w))$ für alle $h \in H$ und $w \in W$. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $F : V \to V'$, sodass $F\big|_W = f$ und $F \circ \rho_g = \rho'_g \circ F$ für alle $g \in G$.*

Satz 1.4 *Sei $\theta : H \to \mathrm{GL}(W)$ eine Darstellung von H. Es existiert dann eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ von G, die von θ induziert ist, und diese Darstellung ist eindeutig bis auf Isomorphie.*

2 Charakter einer induzierten Darstellung

Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ induziert von $\theta : H \to \mathrm{GL}(W)$ und seien χ_ρ und χ_θ die zugehörigen Charaktere. Sei R ein Repräsentantensystem von G/H. Dann gilt folgender

Satz 2.1 *Für alle $u \in G$:*

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r\in R \\ r^{-1}ur\in H}} \chi_\theta(r^{-1}ur) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g\in G \\ g^{-1}ug\in H}} \chi_\theta(g^{-1}ug)\,.$$

Korollar 2.2 *Sei $\varphi = \mathrm{Ind}_H^G \mathbf{1}$, d.h. die von der trivialen Darstellung $\mathbf{1} : H \to \mathbb{C}^*$ induzierte Darstellung von G. Dann ist für alle $u \in G$:*

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G \mathbf{1}}(u) \;=\; \frac{|G:H|}{|Cl(u)|}\,|Cl(u) \cap H|\,,$$

wobei $Cl(u)$ die Konjugiertenklasse von u in G bezeichnet.

Korollar 2.3 (Frobenius'sche Reziprozität) *Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G, $\theta : H \to \mathrm{GL}(W)$ eine Darstellung von H, und $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ die von θ auf G induzierte Darstellung. Sei $\rho' : G \to \mathrm{GL}(U)$ eine weitere Darstellung, $\rho'_H := \rho'\big|_H$ die Einschränkung von ρ' auf H. Dann gilt*

$$(\chi_\rho, \chi_{\rho'})_G = (\chi_\theta, \chi_{\rho'_H})_H\,.$$

Bemerkung 2.4 *Wenn θ und ρ' irreduzibel sind, dann bedeutet die Frobenius'sche Reziprozität folgendes: ρ' kommt in $\rho = \mathrm{Ind}_H^G\theta$ genau so oft vor, wie θ in $\mathrm{Res}_H^G\rho' = \rho'\big|_H$ vorkommt.*

Beispiel 2.5 (Notation von Fulton, Harris) Wir betrachten $H := S_2$ und $G = S_3$. Die irreduziblen Darstellungen von H sind:

$U_2 :=$ triviale Darstellung von S_2

$V_2 :=$ Standarddarstellung von S_2, ($= U_2' :=$ alternierende Darstellung).

Die irreduziblen Darstellungen von G sind:

$U_3 :=$ triviale Darstellung von S_3,

$U_3' :=$ alternierende Darstellung von S_3,

$V_3 :=$ Standarddarstellung von S_3.

Für $W := V_2 = U_2'$ möchten wir nun $\mathrm{Ind}_H^G W$, die von W induzierte Darstellung, berechnen.
Sei $\mathrm{Res}_H^G U$ die Restriktion von U auf H. Dann gilt

$\mathrm{Res}_H^G U_3 = U_2$,

$\mathrm{Res}_H^G U_3' = U_2' = V_2$,

$\mathrm{Res}_H^G V_3 = U_2 \oplus U_2'$.

Wegen der Frobenius'schen Reziprozität folgt: $\mathrm{Ind}_H^G V_2 = U_3' \oplus V_3$.