DARSTELLUNGSTHEORIE DER SYMMETRISCHEN GRUPPE

Dimension der irreduziblen Darstellungen V_λ

Um die Dimension von V_λ zu bestimmen, betrachten wir zunächst eine Formel für den Charakter χ_λ von V_λ, nämlich die Frobenius-Formel.

Sei im folgenden C_i die Konjugiertenklasse in S_d, bestimmt durch die Folge:

$$i = (i_1, i_2, ..., i_d) \ mit \ \sum_{\alpha=1}^{d} \alpha i_\alpha = d$$

C_i besteht aus den Permutationen, die i_1 1-Zyklen, ..., i_d d-Zyklen besitzen.

Wir führen jetzt unabhängige Variablen ein: $x_1, ..., x_k$, wobei $k \geq$ Anzahl Zeilen im Young-Diagramm von λ.

Definition 1 *Definiere die Potenzsumme $P_j(x)$, $1 \leq j \leq d$, und die Diskriminante $\Delta(x)$ wie folgt:*

$$P_j(x) = x_1^j + x_2^j + ... + x_k^j$$

$$\Delta(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

Sei nun $f(x) = f(x_1, ..., x_k)$ eine formale Potenzreihe und $(l_1, ..., l_k)$ ein k-Tupel von nicht-negativen ganzen Zahlen. Dann definiere

$[f(x)]_{(l_1,...,l_k)} :=$ Koeffizient von $x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k}$ in f.

Gegeben eine Partition $\lambda : \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_k \geq 0$ von d. Setze

$$l_1 = \lambda_1 + k - 1,\ l_2 = \lambda_2 + k - 2, ..., l_k = \lambda_k.$$

Die l_i bilden eine strikt abnehmende Folge von k nicht-negativen ganzen Zahlen. Jetzt sagt uns die Frobenius-Formel, was der Charakter von V_λ ist, ausgewertet bei $g \in C_i$:

Frobenius-Formel:

$$\chi_\lambda(C_i) = [\Delta(x) \cdot \prod_{j=1}^{d} P_j(x)^{i_j}]_{(l_1,...,l_k)}$$

Beispiel 1 $d = 5, \lambda = (3,2), C_i$ die Konjugiertenklasse von (12)(345)
d.h. also: $i_1 = 0,\ i_2 = 1,\ i_3 = 1,\ i_4 = i_5 = 0$.
Für k=2 nehmen wir $x_1 und x_2$. Man erhält

$$\Delta(x) = (x_1 - x_2),$$

$$P_1(x)^0 = 1,\ P_2(x)^1 = (x_1^2 + x_2^2),\ P_3(x)^1 = (x_1^3 + x_2^3),$$

$$(l_1, l_2) = (4, 2),\ \text{da } l_1 = 3 + 2 - 1 = 4,\ l_2 = \lambda_2 = 2,$$

$$\text{somit } \chi_{(3,2)}(C_i) = [(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3)]_{(4,2)} = \text{Koeff. von} x_1^4 x_2^2 = 1.$$

Nun brauchen wir die Frobenius-Formel, um die Dimension von V_λ zu berechnen. Der Konjugiertenklasse der Identität entspricht $i = (d)$, also:

$$\dim V_\lambda = \chi_\lambda(C_d) = [\Delta(x) \cdot (x_1 + ... + x_k)^d]_{(l_1,\ldots,l_k)}$$

$\Delta(x)$ ist die Vandermonde-Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_k & \ldots & x_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{k-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_k} (sgn\sigma) x_k^{\sigma(1)-1} \cdots x_1^{\sigma(k)-1}$$

Der andere Term ist:

$$(x_1 + ... + x_k)^d = \sum \frac{d!}{r_1! \cdots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k},$$

wobei die Summe über k-Tupel $(r_1, ..., r_k)$ genommen wird, deren Summe d beträgt.
Nun ist der Koeffizient von $x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k}$ gesucht:

$$\sum sgn(\sigma) \frac{d!}{(l_1 - \sigma(k) + 1)! \cdots (l_k - \sigma(k) + 1)!},$$

wobei die Summe über diejenigen $\sigma \in S_k$ läuft, mit $l_{k-i+1} - \sigma(i) + 1 \geq 0\ \forall\ 1 \leq i \leq k$.

Nach einigen Umformungen erhalten wir für den Koeffizienten:

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{l_1! \cdots l_k!} \prod_{i<j} (l_i - l_j)$$

mit $l_i = \lambda_i + k - i$.

Hakenlängen:
Eine weitere Möglichkeit, $dimV_\lambda$ auszudrücken, liefern uns die Hakenlängen.

DEFINITION 2 *Unter der Hakenlänge eines Kästchens n im Young-Diagramm versteht man die Anzahl Kästchen rechts von n, addiert zu der Anzahl Kästchen unterhalb von n, wobei n selbst einmal mitgezählt wird.*

Durch Induktion leitet sich aus der Frobenius-Formel die folgende Hakenlängen-Formel her.

$$dimV_\lambda = \frac{d!}{\prod(Hakenlängen)}$$

Beweis der Frobenius-Formel

Als nächstes beweisen wir die Formel:

$$\chi_\lambda(C_i) = [\Delta(x) \cdot \prod_j P_j(x)^{i_j}]_{(l_1,\dots,l_k)}$$

Dazu benötigen wir noch einige Hilfsmittel, nämlich 2 Lemmata sowie etwas Theorie über symmetrische Funktionen und Kostka-Zahlen.

Kostka-Zahlen:
Gegeben seien 2 Partitionen λ und μ von d. Nun definieren wir die Kostka-Zahlen kombinatorisch:

DEFINITION 3 *Die Kostka-Zahl $K_{\mu\lambda}$ ist die Anzahl Möglichkeiten, die Kästchen des Young-Diagramms für μ zu füllen mit $\lambda_1 1$‘s, $\lambda_2 2$‘s, ..., $\lambda_k k$‘s, so dass die Einträge in jeder Zeile nicht abnehmen und in jeder Kolonne strikte zunehmen.*

Es gilt immer: $K_{\lambda\lambda} = 1, K_{\mu\lambda} = 0$ für $\mu < \lambda$, $K_{\mu\lambda}$ nicht-negativ.

Beweis:
Für jede Partition λ von d haben wir eine Untergruppe

$$S_\lambda = S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k} \subset S_d$$

Sei U_λ die Darstellung von S_d, die induziert wird von der trivialen Darstellung von S_λ:

$$U_\lambda = A \cdot a_\lambda.$$

Sei $\Psi_\lambda = \chi_{U_\lambda}$ = Charakter von U_λ.

Es existiert eine surjektive Abbildung:

$$U_\lambda = Aa_\lambda \to V_\lambda = Aa_\lambda b_\lambda$$

$$x \to x \cdot b_\lambda$$

Es lässt sich auch schreiben:

$$V_\lambda = Aa_\lambda b_\lambda \cong Ab_\lambda a_\lambda \subset Aa_\lambda = U_\lambda$$

Später werden wir sehen, dass gilt: Jedes U_λ enthält V_λ mit Multiplizität 1 und enthält andere V_μ nur für $\mu > \lambda$.
Mit der Formel für Charaktere induzierter Darstellungen erhält man nach einiger Rechnung für den Charakter von U_λ:

$$\Psi_\lambda(C_i) = [P^{(i)}]_\lambda.$$

Das ist der Koeffizient von
$X^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\lambda_k}$ in $P^{(i)} = (x_1 + \dots + x_k)^{i_1} \cdot (x_1^2 + \dots + x_k^2)^{i_2} \cdot \dots \cdot (x_1^d + \dots + x_k^d)^{i_d}$.

Nun müssen wir diese Koeffizienten vergleichen mit den Koeffizienten $w_\lambda(i)$, die wie folgt definiert sind:

$$w_\lambda(i) = [\Delta \cdot P^{(i)}]_l,\ l = (\lambda_1 + k - 1, \dots, \lambda_k)$$

Zu zeigen bleibt:

$$\chi_\lambda(C_i) = w_\lambda(i)$$

Für jedes symmetrische Polynom P gilt

$$[P]_\lambda = \sum_\mu K_{\mu\lambda}[\Delta \cdot P]_{(\mu_1+k-1,\mu_2+k-2,\ldots,\mu_k)},$$

wobei $K_{\mu\lambda}$ die vorher definierten Kostka-Zahlen sind.

Nun benutzen wir folgende 2 Lemmata aus Fulton u. Harris:

Lemma A.26: Für jedes symmetrische Polynom P vom Grad d in k Variablen gilt:

$$\Psi_\lambda(P) = \sum_\mu K_{\mu\lambda} \cdot w_\mu(P)$$

Lemma A.28: Für Partitionen λ und μ von d gilt:

$$\sum_i \frac{1}{1^{i_1} i_1! \cdot \ldots \cdot d^{i_d} i_d!} w_\lambda(i) w_\mu(i) = 1$$

falls $\lambda = \mu$, sonst beträgt der Wert 0.

Dies angewandt auf $P = P^{(i)}$ gibt:

$$\Psi_\lambda(C_i) = \sum_\mu K_{\mu\lambda} w_\mu(i) = w_\lambda(i) + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda} w_\mu(i)$$

Mit Lemma A.28 ergibt sich:

$$\frac{1}{d!} \sum_i |C_i| w_\lambda(i) w_\mu(i) = \delta_{\lambda\mu}$$

Die Funktionen w_λ, betrachtet als Funktionen auf den Konjugiertenklassen von S_d, erfüllen also die gleichen Orthogonalitätsrelationen wie die irreduziblen Charaktere von S_d. Von diesen Gleichungen können wir herleiten, dass die w_λ die irreduziblen Charaktere von S_d sind. Genauer gilt:

$$\chi_\lambda(C_i) = w_\lambda(i)$$

für jede Konjugiertenklasse C_i von S_d; was den Beweis der Frobenius-Formel abschliesst.

■

Korollar 1 *(Young-Regel)*
Die Zahl $K_{\mu\lambda}$ ist die Multiplizität der irreduziblen Darstellung V_μ in der induzierten Darstellung U_λ:

$$U_\lambda \cong V_\lambda \oplus \oplus_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda} V_\mu.$$

Für die Charaktere gilt:

$$\Psi_\lambda = \chi_\lambda + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda}\chi_\mu.$$