Über Anzahl und Gradbeschränkung irreduzibler Darstellungen

Martin Lotz

20. Dezember 1999

1 Anzahl irreduzibler Darstellungen

Sei G eine endliche Gruppe. Eine komplexwertige Funktion f auf G heisst Klassenfunktion über G, wenn sie konstant auf den Konjugiertenklassen ist. Im folgenden sei $\mathbb{C}G_K$ der Raum der Klassenfunktionen auf G mit Skalarprodukt $(\phi, \psi) := \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\phi(t)\psi(t^{-1})$.

Proposition 1.1. *Sei $f \in \mathbb{C}G_K$, $\rho : G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung von G und $\rho_f \in GL(V)$ definiert durch*

$$\rho_f = \sum_{t\in G} f(t)\rho_t.$$

Ist V irreduzibel mit Dimension n und Charakter χ, dann ist ρ_f eine Streckung mit Faktor

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t) = \frac{|G|}{n}(f, \chi^*)$$

Satz 1.1. *Die irreduziblen Charaktere von G bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}G_K$.*

Der folgende Satz, der schon im letzten Vortrag erwähnt wurde, folgt nun unmittelbar aus den vorherigen Überlegungen:

Satz 1.2. *Die Anzahl irreduzibler Darstellungen von G ist gleich der Anzahl der Konjugiertenklassen von G.*

Satz 1.3 (2. Orthogonalitätsrelation). *Seien $\chi_1, \ldots, \chi_h$ die irreduziblen Charaktere von G, $g, s \in G$ und $Cl(g)$ die Konjugiertenklasse von g. Dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i^*(s)\chi_i(g) = \begin{cases} \frac{|G|}{|Cl(g)|} & \textit{für } s \in Cl(g) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Korollar 1.1. *Ein Element $g \in G$ ist genau dann zu seinem Inversen konjugiert, wenn für alle irreduziblen Charaktere χ gilt: $\chi(g) \in \mathbb{R}$.*

Mit dem bisher gezeigten lässt sich nun folgende Aussage über abelsche Gruppen machen:

Satz 1.4. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn alle irreduziblen Darstellungen von G Grad 1 besitzen.*

Korollar 1.2. *Sei G eine endliche Gruppe und A eine abelsche Untergruppe von G. Dann hat jede irreduzible Darstellung von G einen Grad $\leq |G : A|$.*

2 Irreduzible Darstellungen der Diedergruppe

Die Diedergruppe D_n wird von 2 Elementen x, y erzeugt, die die Relationen $x^n = 1$, $y^2 = 1$ und $xy = (xy)^{-1}$ erfüllen. Sie kann als Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks in der Ebene interpretiert werden, wobei y eine Spiegelung um eine geeignete Symmetrieachse und x eine Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ darstellt. Die Ordnung von D_n ist $2n$ und die Elemente können aufgelistet werden als $\{x^i y^j; 0 \leq i < n, 0 \leq j < 2\}$.

D_n besitzt eine abelsche Untergruppe der Ordnung n, nämlich die von x erzeugte zyklische Gruppe. Nach Korollar 1.2 haben also alle irreduziblen Darstellungen von D_n Grad ≤ 2.

Sei n erstmal gerade. Man erhält 4 Darstellungen der Ordnung 1 indem man den Erzeugenden x und y die Werte ± 1 in allen Kombinationen zuordnet. Die Charaktere sind somit folgende:

$$
\begin{aligned}
\psi_1(x) &= 1 & \psi_1(y) &= 1, \\
\psi_2(x) &= 1 & \psi_2(y) &= -1, \\
\psi_3(x) &= -1 & \psi_3(y) &= 1, \\
\psi_4(x) &= -1 & \psi_4(y) &= -1
\end{aligned}
$$

Das sind auch die einzigen irreduziblen Charaktere mit Grad 1, da einerseits der Betrag 1 sein muss, anderseits x und y zu ihren jeweiligen Inversen konjugiert sind, und die Charaktere deshalb reelwertig sein müssen.

Wegen $|D_n| = 2n$ und Korollar 1.3 bei Theo Bühler muss es genau $\frac{n}{2} - 1$ irreduzible Darstellungen von Grad 2 geben.

Proposition 2.1. *Für gerades n sind die irreduziblen Darstellungen von D_n mit Grad 2 gegeben durch:*

$$
\rho_h(x^k) = \begin{pmatrix} \zeta^{hk} & 0 \\ 0 & \zeta^{-hk} \end{pmatrix}, \qquad \rho_h(yx^k) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{-hk} \\ \zeta^{hk} & 0 \end{pmatrix}
$$

wobei $1 \leq h < \frac{n}{2}$, $0 \leq k < n$ und $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Für die Charaktere gilt:

$$
\chi_h(g) = \begin{cases} 0 & \text{für } g = yx^k \\ \zeta^{hk} + \zeta^{-hk} & \text{für } g = x^k \end{cases}
$$

Für ungerades n erhält man nur 2 irreduzible Darstellungen mit Grad 1 mit Charakteren:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 & \qquad \psi_1(y) &= 1, \\ \psi_2(x) &= 1 & \qquad \psi_2(y) &= -1 \end{aligned}$$

Das folgt aus der Tatsache, dass $1 = \psi(e) = \psi(x^n) = \psi(x)^n$ gelten muss. Die irreduziblen Darstellungen mit Grad 2 sind genau wie beim geraden Fall gegeben.

3 Eindimensionale Darstellungen

3.1 Weitere Eigenschaften von Charakteren

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung von G mit Charakter χ. Der Kern von χ ist die Menge

$$ker(\chi) := \{g \in G; \chi(g) = \chi(e)\}$$

Der folgende Satz zeigt, dass der Kern eines Charakters ein Normalteiler von G ist.

Satz 3.1. *Für eine Darstellung ρ mit Charakter χ gilt: $ker(\rho) = ker(\chi)$.*

Proposition 3.1. *Seien $\chi_1, \ldots, \chi_h$ die irreduziblen Charaktere einer endlichen Gruppe und ψ ein Charakter mit $\psi = \sum_{i=1}^{h} a_i \chi_i$. Dann gilt:*

$$ker(\psi) = \bigcap_{a_i \neq 0} ker(\chi_i), \qquad \textit{und} \bigcap_{i=1}^{h} ker(\chi_i) = e$$

Definition 3.1 (Kommutatoruntergruppe). Die Untergruppe $[G, G] :=< [g, h] = ghg^{-1}h^{-1}; g, h \in G >$ von G heisst Kommutatoruntergruppe.

Im folgenden wird $[G, G]$ mit G' bezeichnet. Für die Kommutatoruntergruppe gilt:

- $G' \lhd G$
- G/G' ist abelsch
- Sei $K \lhd G$; Dann ist G/K abelsch, wenn $G' \leq K$

G' ist also der kleinste Normalteiler von G mit abelscher Faktorgruppe.

Lemma 3.1. *Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung von G mit Charakter χ und $N \lhd G$ ein Normalteiler von G, wobei $N \subseteq ker(\chi)$ gelten soll. Dann ist die Abbildung $\rho' : G/N \to GL(V)$, definiert durch $\rho'(gN) = \rho(g)$, eine Darstellung. Insbesondere ist ρ genau dann irreduzibel, wenn ρ' es ist.*

Einige Überlegungen zeigen, dass die Menge der irreduziblen Charaktere von G/N mit der Menge der irreduziblen Charaktere von G, deren Kern N enthält, identifiziert werden kann.

3.2 Eindimensionale Darstellungen

Satz 3.2. *Für die Kommutatoruntergruppe G' von G gilt:*

$$G' = \bigcap_{\chi(e)=1} ker(\chi),$$

und die Anzahl eindimensionaler Charaktere von G ist gleich $|G : G'|$.

Bemerkung 3.1. Eine eindimensionale Darstellung ist ein Homomorphismus von G nach $\mathbb{C}^*$ und kann mit ihrem Charakter identifiziert werden. Eindimensionale Charaktere werden auch lineare Charaktere genannt. Desweiteren gilt für einen Charakter genau dann $\chi(e) = 1$, wenn χ eindimensional ist.

Sei G eine endliche Gruppe. Die Menge G^* der linearen Charaktere von G bildet zusammen mit der Verknüpfung $(\chi\psi)(g) := \chi(g)\psi(g)$ eine abelsche Gruppe, die sogenannte duale Gruppe zu G.

Proposition 3.2. *Ist G abelsch, so gilt $G \cong G^*$.*

Im Allgemeinen folgt: $G^* \cong (G/G')^* \cong G/G'$.

4 Irreduzible Darstellungen der Quaternionengruppe

Die Quaternionengruppe ist die Menge $Q_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, wobei die Multiplikationstafel durch die Relation $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ gegeben ist.

Die Kommutatoruntergruppe von Q_8 ist: $Q_8' = \{1, -1\}$. Nach den Resultaten des vorherigen Abschnittes entsprechen die linearen Charaktere von Q_8 genau den irreduziblen Charakteren von Q_8/Q_8'.

Mit Hilfe der Tatsache, dass $Q_8/Q_8' \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (Kleinsche Vierergruppe), der Gradgleichung (Korollar 1.3 bei Theo Bühler) und der zweiten Orthogonalitätsrelation lässt sich die Charaktertafel von Q_8 konstruieren:

	{ 1}	{ -1}	{ $\pm i$ }	{ $\pm j$ }	{ $\pm k$ }
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0