Darstellungstheorie

Srdjan Micic

Seminarvortrag am 01.11.99

Definition 1 *Seien V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum endlicher Dimension, $(G,\cdot)$ eine endliche Gruppe. Eine lineare* Darstellung *von G ist ein Homomorphismus*

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V), \quad \textit{d.h.} \quad \rho(s\cdot t) = \rho(s)\circ\rho(t) \qquad \textit{für alle } s,t \in G.$$

V heisst Darstellungsraum *oder* Darstellung *von G,* $\deg(\rho) := \dim(V)$ *heisst der* Grad *der Darstellung.*

Beispiel 1 $G = \{1,\sigma\}$, $V = \mathbb{C}$, $\rho(1) = 1$, $\rho(\sigma) = -1$.

Definition 2 *Seien $\varphi : V \to W$ linear, V, W Darstellungen von G:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ {\scriptstyle \rho_g^1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho_g^2} \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W. \end{array}$$

*φ heisst G-*linear*, falls das obige Diagramm kommutiert:*

$$\varphi\circ\rho_g^1 = \rho_g^2\circ\varphi \qquad \textit{für alle } \ g\in G.$$

Zwei Darstellungen ρ^1 und ρ^2 von G heissen isomorph*, falls es einen G-linearen Isomorphismus zwischen V und W gibt.*

Definition 3 *Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine lineare Darstellung von G, und U ein Unterraum von V. U heisst G-*invariant *oder eine* Unterdarstellung*, wenn*

$$\rho_g(U) \subseteq U \qquad \textit{für alle } \ g\in G.$$

Theorem 1 *Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine lineare Darstellung von G und U ein G-invarianter Unterraum von V. Dann existiert ein G-invarianter Unterraum U' von V, sodass $V = U \oplus U'$.*

Definition 4 *Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine lineare Darstellung. ρ heisst irreduzibel, wenn es ausser $\{0\}$ oder V keinen Unterraum von V gibt, der G-invariant ist.*

Theorem 2 *Jede Darstellung V von G lässt sich als direkte Summe von irreduziblen Darstellungen schreiben, d.h.*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n, \quad U_i \textit{ irreduzibel für } 1 \le i \le n$$

Lemma 1 (Schur'sches Lemma) *Seien V, W irreduzible Darstellungen von G, $\varphi : V \to W$ G-linear. Dann gilt:*

1. *φ ist ein Isomorphismus oder identisch 0.*
2. *Falls $V = W$, dann ist $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$.*