CHARAKTERE

Stephan Schönenberger

Definition und Eigenschaften Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$ eine Basis von V und $A : V \to V$, $A \in Gl(V)$.

DEFINITION 1 *Die* **Spur** $Tr(A)$ *von* A *ist definiert als* $Tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, *wo* (a_{ij}) *die zu* A *gehörige* $n \times n$*-Marix ist.*

BEMERKUNG 1 Die Spur ist unabhängig von der Wahl der Basis von V.

Sei G eine endliche Gruppe und $\rho : G \to Gl(V)$ eine lin. Darstellung.

DEFINITION 2 *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \chi : G & \to & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & \chi_\rho(a) := Tr(\rho_a) \end{array}$$

heisst der **Charakter von** ρ.

PROPOSITION 1 *Ist* χ *der Charakter der Darstellung* $\rho : G \to Gl(V)$, $dim(V) = n$, *so gilt:*

i) $\chi(1) = n$

ii) $\chi(a^{-1}) = \chi(a)^*$

iii) $\chi(x^{-1}ax) = \chi(a)$

Begr:

i) $\chi(1) = Tr(\rho_1) = Tr(\mathbf{1}) = n$

ii) $\chi(a^{-1}) = Tr(\rho_a^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* = Tr(\rho_a)^* = \chi(a)^*$

iii) $\chi(x^{-1}ax) = \chi(a)$ gdw. $\chi(ax) = \chi(xa)$ und das gilt wegen Symmetrie der Spur.

q.e.d.

BEISPIEL 1

1. für die reguläre Darstellung: $dim(V) = |G| = g$, $\rho_s(e_t) = e_{st}$ gilt:

$$\chi_\rho(s) := \begin{cases} g & \text{s=1} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. für die Permutationsdarstellung V mit Basis $\{e_x\}_{x \in X}$: $\rho_s(e_x) := e_{sx}$ gilt:

$$\chi(a) := \#\ \text{Fixpunkte von } a \text{ in } X$$

Die duale Darstellung Sei $\rho : G \to Gl(V)$ eine lin. Darstellung mit Charakter χ und V^* der Dualraum von V.

Definition 3 *Die* **Auswertungsabbildung** *ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* &\to \mathbb{C} \\ (v, f) &\mapsto \langle v, f \rangle := f(v) \end{aligned}$$

Definition 4 *Die* **duale Darstellung** $\rho^* : G \to Gl(V^*)$ *ist definiert durch*

$$\rho_g^*(f) : V \to \mathbb{C} \quad \rho_g^*(f)(v) := f\left(\rho_{g^{-1}}(v)\right)$$

Lemma 1 *Für die duale Darstellung gilt:*

$$\langle \rho_g(v), \rho_g^*(f) \rangle = \langle v, f \rangle$$

Lemma 2 *Für den Charakter* χ_{ρ^*} *der dualen Darstellung gilt:* $\chi_{\rho^*} = \chi_\rho^*$.

Direkte Summe von Darstellungen Seien V_i, $i = 1, 2$ Vektorräume, G eine endl. Gruppe und $\rho^i : G \to Gl(V_i)$ lin. Darstellungen.

Definition 5 *Die* **direkte Summe** *der Darstellungen ist definiert durch:*

$$(\rho^1 \oplus \rho^2) : G \to Gl(V_1 \oplus V_2)$$

$$(\rho^1 \oplus \rho^2)_a = \rho_a^1 \oplus \rho_a^2$$

Ist R_a^i die Matrix von ρ_a^i, $i = 1, 2$, dann ist die Matrix R_a von $(\rho^1 \oplus \rho^2)_a$ in Blockform gegeben durch

$$R_a = \begin{pmatrix} R_a^1 & 0 \\ 0 & R_a^2 \end{pmatrix}$$

Lemma 3 *Für den Charakter der direkten Summe gilt:* $\chi_{\rho^1 \oplus \rho^2} = \chi_{\rho^1} + \chi_{\rho^2}$

Tensorprodukte, Tensorprodukte von Darstellungen Wir wollen Tensorprodukte in einem etwas allgemeineren Rahmen einführen und dann auf Darstellungen anwenden. Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

Definition 6 *A, B, C R-Moduln. Eine Abbildung $f : A \times B \to C$ heisst* **bilinear**, *falls für $a_1, a_2, a \in A$, $b_1, b_2, b \in B$ und $r \in R$ gilt:*

I) $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$

II) $f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2)$

III) $f(ra, b) = rf(a, b) = f(a, rb)$

Definition 7 *Sei F der freie R-Modul über $A \times B$ und K der Untermodul von F, erzeugt von Elementen der Form*

$$(a+a',b)-(a,b)-(a',b)$$

$$(a,b+b')-(a,b)-(a,b')$$

$$(ra,b)-r(a,b)$$

$$(a,rb)-r(a,b)$$

Der R-Modul F/K heisst **Tensorprodukt** *von A und B und wird mit $A \otimes_R B$ bezeichnet. Eine Äquivalenzklasse $(a,b)+K$ wird als $a \otimes b$ geschrieben.*

Definition 8 *Die bilineare Abbildung*

$$\begin{aligned} i : A \times B &\to A \otimes B \\ (a,b) &\mapsto a \otimes b \end{aligned}$$

heisst **natürliche** *Abbildung oder* **kanonische** *Abbildung.*

Satz 1 (universelle Eigenschaft des Tensorproduktes) *Ist $i : A \times B \to A \otimes B$ die natürliche Abbildung, dann gibt es zu jeder bilinearen Abbildung $f : A \times B \to C$ in einen R-Modul C genau eine R-lineare Abbildung $\bar{f} : A \otimes B \to C$, so dass $f = i \circ \bar{f}$.*

Satz 2 *Falls für einen R-Modul X und eine bilineare Abbildung $\varphi : A \times B \to X$ die universelle Eigenschaft gilt, dann ist X isomorph zu $A \otimes B$.*

Satz 3 *Sind $\lambda : A \to A'$, $\mu : B \to B'$ R-lineare Abbildungen der R-Moduln A, A', B, B', dann gibt es eine eindeutige R-lineare Abbildung $f : A \otimes B \to A' \otimes B'$, so dass $f(a \otimes b) = \lambda(a) \otimes \mu(b)$.*

Kehren wir zur Darstellungstheorie zurück: Ist R ein Körper, so ist ein R-Modul ein Vektorraum.

Satz 4 *Für Vektorräume V_1, V_2 und V_1^* der Dualraum von V_1 ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \psi : V_1^* \otimes V_2 &\to Hom(V_1, V_2) \\ f \otimes v_2 &\mapsto \psi(f \otimes v_2) \end{aligned}$$

definiert durch

$$\psi(f \otimes v_2)(v_1) := f(v_1)v_2$$

ein Isomorphismus.

Definition 9 *Sind $\rho^i : G \to Gl(V_i)$ Darstellungen, dann ist das* **Tensorprodukt** *$\rho^1 \otimes \rho^2 : G \to Gl(V_1 \otimes V_2)$ der Darstellungen definiert durch $(\rho^1 \otimes \rho^2)_g := \rho^1_g \otimes \rho^2_g$.*

Lemma 4 *Sind χ_i die Charaktere der Darst. ρ^i $(i = 1,2)$, dann ist der Charakter $\chi_{\rho^1 \otimes \rho^2}$ gegeben durch $\chi_{\rho^1 \otimes \rho^2} = \chi_1 \chi_2$*

Orthogonalitätsrelationen Sei G eine endl. Gruppe. Für eine Darstellung $\rho : G \to Gl(V)$ definieren wir

$$V^G := \{v \in V \ : \ \rho_g(v) = v \quad \forall\, g \in G\}$$

Im allgemeinen ist eine Abbildung $\rho_g : V \to V$ nicht G-linear. Wir konstruieren eine G-lineare Abbildung durch Mittelung:

$$\varphi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g$$

PROPOSITION 2 *φ ist eine G-lineare Projektion auf V^G.*

Für eine Projektion p gilt $Tr(p) = Rang(p)$ und daher:

$$dim(V^G) = Tr(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Tr(\rho_g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$$

BEMERKUNG 2 Für alle irred. Darstellungen V ausser der trivialen gilt $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$

Mit $\mathbb{C}G := \{f : G \to \mathbb{C}\}$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von G nach $\mathbb{C}$.

DEFINITION 10 *$f \in \mathbb{C}G$ heisst **Klassenfunktion**, falls $\forall\, a, b \in G$ gilt*

$$f(ab) = f(ba)$$

BEMERKUNG 3 Nach Proposition 1.iii) ist der Charakter eine Klassenfunktion.

LEMMA 5 *$\mathbb{C}G_K := \{f \in \mathbb{C}G \ : \ f \text{ ist Klassenfunktion}\} \subset \mathbb{C}G$ bildet einen Vektorraum.*

DEFINITION 11 *Wir definieren ein **Skalarprodukt** auf $\mathbb{C}G_K$ durch*

$$(\varphi, \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(g)$$

SATZ 5 (ORTHOGONALITÄTSRELATIONEN) *Ist G eine endl. Gruppe, $\rho^i : G \to Gl(V_i)$ irreduzible Darstellungen mit Charakter χ_i, $(i = 1, 2)$. Dann gilt:*

i) $(\chi_1, \chi_2) = 1$, falls ρ^1 und ρ^2 äquivalent sind.

ii) $(\chi_1, \chi_2) = 0$, falls ρ^1 und ρ^2 nicht äquivalent sind.

Begr: Betrachte die folgende Darstellung:

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \to & Gl\left(Hom(V_1, V_2)\right) \\ g & \mapsto & \begin{array}{rcl} \rho_g : Hom(V_1, V_2) & \to & Hom(V_1, V_2) \\ \rho_g(f) & := & \rho_g^2 f \left(\rho_g^1\right)^{-1} \end{array} \end{array}$$

Es gilt

$$Hom(V_1, V_2) = \{ \ G\text{-linere Abb. } V_1 \to V_2 \ \}$$

und da V_1, V_2 irreduzibel, folgt aus dem Lemma von Schur:

$$dim\left(Hom(V_1,V_2)^G\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \rho^1 \text{ und } \rho^2 \text{ äquivalent} \\ 0 & \text{falls } \rho^1 \text{ und } \rho^2 \text{ nicht äquivalent.} \end{cases}$$

Weiter gilt wegen Isomorphie der Darstellungen $V_1^* \otimes V_2 \cong Hom(V_1, V_2)$ für den Charakter von ρ:

$$\chi_\rho = \chi_1^* \chi_2$$

und daher

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_1^*(g)\chi_2(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g) = dim\left(Hom(V_1,V_2)^G\right)$$

q.e.d.

Anwendungen der Orthogonalitätsrelationen

Satz 6 *Jede endl. dim. Darstellung einer endl. Gruppe ist direkte Summe irreduzibler Darstellungen.*

Es gibt also $V = \oplus_{i=1}^k V_i$ mit irred. ρ-inv. V_i. Die auf V_i induzierten Darstellungen seien $\rho^i := \rho|_{V_i}$. Es gilt daher $\rho = \sum_{i=1}^k \rho^i$. mit irreduziblen $\rho^i : G \to Gl(V_i)$. I.A. gibt es aber äquivalente Darstellungen in dieser Zerlegung. Diese wollen wir zusammenfassen: Sind V_i und V_j äquivalent ($i \neq j$), so lassen sie sich mit einem G-Isomorphismus identifizieren. O.B.d.A. können wir festlegen:

$$V = \underbrace{V_1 \oplus \ldots \oplus V_1}_{n_1-mal} \oplus \underbrace{V_2 \oplus \ldots \oplus V_2}_{n_2-mal} \oplus \ldots \oplus \underbrace{V_s \oplus \ldots \oplus V_s}_{n_s-mal}$$

Definition 12 *$nV := V \oplus \ldots \oplus V$, $n\rho := \rho \oplus \ldots \oplus \rho$; n Summanden.*

Damit wird:

$$V = \bigoplus_{i=1}^s n_i V_i; \quad \rho = \bigoplus_{i=1}^s n_i \rho^i.$$

Für die Charaktere folgt nach Proposition 3:

$$\chi = \sum_{i=1}^s n_i \chi_i$$

Satz 7 *Mit obiger Notation gilt für eine irred. Darstellung $\varphi : G \to Gl(W)$ mit Charakter ψ:*

$$(\chi, \psi) = \begin{cases} n_i & \textit{falls } \varphi \textit{ äquivalent zu } \rho^i \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Korollar 1 *Sind $\rho = \sum_{i=i}^k n_i\rho^i = \sum_{i=i}^l m_i\psi^i$ zwei Zerlegungen einer Darstellung wie oben. Dann ist $k = l$ und es gibt eine Permutation $\pi \in S_k$, so dass ρ^i äquivalent ist zu $\psi^{\pi(i)}$ und $n_i = m_{\pi(i)}$. Die Zerlegungen sind also bis auf Äquivalenz eindeutig.*

Satz 8 *Ist χ der Charakter von $\rho : G \to Gl(V)$, dann gilt $(\chi, \chi) = 1$ gdw. die Darstellung ist irreduzibel.*