Äussere und symmetrische Potenzen
Beispiele von Darstellungen

Theo Bühler

Vortrag im Seminar über Darstellungstheorie endlicher Gruppen
15.11.99

1 Zerlegung der regulären Darstellung

Definition 1.1 *Die reguläre Darstellung einer Gruppe ist die zu der Operation von G auf sich durch Linksmultiplikation assoziierte Darstellung:*

$$\rho^{\text{reg}}(g) : e_h \longmapsto e_{g \cdot h}.$$

Proposition 1.1 *Der Charakter χ_G der regulären Darstellung der Gruppe G ist:*

$$\chi_G(e) = |G|, \qquad \chi_G(g) = 0, \quad g \neq e.$$

$\chi_1, \ldots, \chi_h$ seien die irreduziblen Charaktere von G, $\eta_1, \ldots, \eta_h$ deren Grade (Dimension des Darstellungsraums, $\eta_i = \chi_i(e)$).

Korollar 1.2 *Jede irreduzible Darstellung ist in der regulären Darstellung mit der Vielfachheit ihres Grades enthalten.*

Korollar 1.3 *Es gelten*

i) $\sum_{i=1}^{h} \eta_i^2 = |G|$ *und*

ii) $\sum_{i=1}^{h} \eta_i \chi_i(g) = 0$, *falls* $g \neq e$.

Satz 1.4 *Die Grade der irreduziblen Darstellungen teilen die Gruppenordnung:* $\eta_i \mid |G|$.

Satz 1.5 *# irreduzible Darstellungen von G = # Konjugiertenklassen in G.*

2 Darstellungen von S_3, Charaktertafeln

Satz 2.1 *Zwei Permutationen sind in S_n genau dann zueinander konjugiert, wenn sie in disjunkter Zykelschreibweise dieselbe Partition von n induzieren.*

2.1 Die Standarddarstellung von S_n

Natürlich ist folgende Darstellung von S_n:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n: & S_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\bigoplus_{i=1}^{n} \langle e_i \rangle_{\mathbb{C}}) \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma \cdot e_i \mapsto e_{\sigma(i)}. \end{array}$$

Offensichtlich ist φ_n reduzibel, man hat $U := \langle \sum e_i \rangle_{\mathbb{C}}$ und dessen orthogonales Komplement $V = \{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum v_i = 0\}$, welche beide S_n-stabil sind. V ist irreduzibel (siehe unten), man nennt V auch die *Standarddarstellung von S_n*, sie hat Dimension $n-1$.

Proposition 2.2 *Die Standarddarstellung V von S_n ist irreduzibel für alle n.*

2.2 Darstellungen von S_3

Die irreduziblen Darstellungen von S_3 sind:

- die triviale Darstellung,
- die alternierende Darstellung und
- die Standarddarstellung.

2.3 Charaktertafeln

Man kann jetzt mit Korollar 1.3 für S_3 folgende Tabelle erstellen

S_3	1 [(1)]	3 [(1 2)]	2 [(1 2 3)]
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Allgemein:

Gruppe	# Elem in KK Konjugiertenklasse
	Charakter der Darst.

3 Äussere und symmetrische Potenzen

3.1 Tensorprodukt von Vektorräumen

Definition 3.1 *Das* Tensorprodukt *zweier (K-)Vektorräume V und W ist ein Vektorraum $V \otimes W$ mit einer bilinearen Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \pi: & V \times W & \longrightarrow & V \otimes W \\ & (v, w) & \longmapsto & v \otimes w, \end{array}$$

so dass jede bilineare Abbildung $\beta : V \times W \longrightarrow U$ nach einem beliebigen Vektorraum U eindeutig über $V \otimes W$ faktorisisert, d.h. es gibt eine eindeutige lineare Abbildung φ_β von $V \otimes W$ nach U mit $\beta = \varphi_\beta \circ \pi$.

Satz 3.1 *Das Tensorprodukt ist*

- *kommutativ:* $V \otimes W \cong W \otimes V$,
- *distributiv:* $(V_1 \oplus V_2) \otimes W \cong (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W)$ *und*
- *assoziativ:* $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$.

Definition 3.2 *Die Tensorpotenzen* $V^{\otimes n}$ *von* V *sind* $V^{\otimes n} := V \otimes \cdots \otimes V$. $V^{\otimes 0}$ *ist der Körper* K.

3.2 Äussere Potenzen und symmetrische Potenzen

Definition 3.3 *Der* Alt*-Endomorphismus von* $V^{\otimes n}$ *ist:*

$$\mathrm{Alt} : v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}\,(\sigma)\; v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Satz 3.2 Alt *ist ein Homomorphismus von* $V^{\otimes n}$ *nach* $V^{\otimes n}$

Definition 3.4

- $\mathrm{Alt}^n V := \mathrm{im}\,\mathrm{Alt}$, $\mathrm{Alt}^0 V := K$
- $\mathrm{Sym}^n V := \ker \mathrm{Alt}$, $\mathrm{Sym}^0 V := K$

Korollar 3.3

- Alt *ist eine Projektion von* $V^{\otimes n}$ *nach* $\mathrm{Alt}^n V$.
- $V^{\otimes n} = \mathrm{Sym}^n V \oplus \mathrm{Alt}^n V$ *für* $n \geq 1$.

"Komplementär" kann man mit dem Sym-Endomorphismus argumentieren:

$$\mathrm{Sym} : v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Definition 3.5

- *Definiere* $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n := n!\ \mathrm{Alt}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$, *das* "äussere Produkt".
- *Definiere* $v_1 \cdot \cdots \cdot v_n := n!\ \mathrm{Sym}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$, *das* "symmetrische Produkt".

Satz 3.4 *Ist* $\{e_1, \ldots, e_k\}$ *eine Basis von* V, *so sind*

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \mid\ i_1 < \cdots < i_n\} \quad \text{und} \quad \{e_{i_1} \cdot \cdots \cdot e_{i_n} \mid\ i_1 \leq \cdots \leq i_n\}$$

Basen von $\mathrm{Alt}^n V$ *bzw.* $\mathrm{Sym}^n V$.

3.3 Einige Bemerkungen über Isomorphien

Nach dem ersten Isomorphiesatz gilt für jeden Homomorphismus $\varphi : G \to H$

$$G/\ker(\varphi) \cong \operatorname{im}(\varphi).$$

Damit werden die äusseren und symmetrischen Potenzen automatisch als Quotienten implementiert.

Satz 3.5

- $\operatorname{Alt}^n(V \oplus W) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} (\operatorname{Alt}^k V \otimes \operatorname{Alt}^{n-k} W)$.
- $\operatorname{Sym}^n(V \oplus W) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} (\operatorname{Sym}^k V \otimes \operatorname{Sym}^{n-k} W)$.

3.4 Produkte und Potenzen von Darstellungen

Definition 3.6 *Das* Tensorprodukt *von Darstellungen ist*

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g).$$

Definition 3.7 *Die* n-fache äussere Potenz *von Darstellungen ist*

$$(\rho \wedge \cdots \wedge \rho)(g) := \rho(g) \wedge \cdots \wedge \rho(g).$$

Definition 3.8 *Die* n-fache symmetrische Potenz *von Darstellungen ist*

$$(\rho \cdot \cdots \cdot \rho)(g) := \rho(g) \cdot \cdots \cdot \rho(g).$$

$\rho \wedge \rho$ nennt man das äussere und $\rho \cdot \rho$ das symmetrische Quadrat von ρ.

3.5 Charaktere von Produkt- und Potenzdarstellungen

Satz 3.6 *Für den Charakter des Tensorprodukts von Darstellungen gilt:*

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g)\chi_{\rho_2}(g).$$

Satz 3.7 *Für den Charakter des äusseren bzw. symmetrischen Quadrats (Bezeichnung χ_a^2 bzw. χ_s^2) von ρ gilt:*

$$\begin{aligned} \chi_s^2(g) &= \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2)), \quad \textit{bzw.} \\ \chi_a^2(g) &= \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2)), \end{aligned}$$

insbesondere ist $\chi_{\rho \otimes \rho} = \chi_s^2 + \chi_a^2$.

3.6 Äussere Potenzen der Standarddarstellung von S_n

Satz 3.8 *Jede äussere Potenz $\operatorname{Alt}^k V$ der Standarddarstellung von S_n ist irreduzibel* $(0 \leq k \leq n-1)$.

4 Beispiele: S_4 und A_4

4.1 Darstellungen von S_4

	1	6	8	6	3
S_4	$[(1)]$	$[(1\,2)]$	$[(1\,2\,3)]$	$[(1\,2\,3\,4)]$	$[(1\,2)(3\,4)]$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

Satz 4.1 *Sei $N \triangleleft G$ ein Normalteiler und $\rho : G/N \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung. Dann ist $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V), \rho'(g) := \rho(gN)$ eine Darstellung, die* "von G/N nach G geliftete Darstellung".
Ist $W < V$ ein G-stabiler Unterraum, so ist W auch G/N-stabil, insbesondere: ist ρ irreduzibel, so ist auch ρ' irreduzibel.

4.2 Darstellungen von A_4

$A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

	1	1	1
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ζ	ζ^2
χ_3	1	ζ^2	ζ,

wobei $\zeta := e^{2\pi i/3}$.

	1	4	4	3
A_4	$[(1)]$	$[(1\,2\,3)]$	$[(1\,3\,2)]$	$[(1\,2)(3\,4)]$
ρ_1	1	1	1	1
ρ_2	1	ζ	ζ^2	1
ρ_3	1	ζ^2	ζ	1
ρ_4	3	0	0	-1

5 Darstellungen von S_5

5.1 Die Charaktertafel

	1	10	20	30	24	15	20
S_5	$[(1)]$	$[(1\,2)]$	$[(1\,2\,3)]$	$[(1\,2\,3\,4)]$	$[(1\,2\,3\,4\,5)]$	$[(1\,2)(3\,4)]$	$[(1\,2)(3\,4\,5)]$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1	1	-1
χ_3	4	2	1	0	-1	0	-1
χ_4	4	-2	1	0	-1	0	1
χ_5	6	0	0	0	1	-2	0
χ_6	5	1	-1	-1	0	1	1
χ_7	5	-1	-1	1	0	1	-1

5.2 Beispiele

- Sei ρ eine Darstellung von S_5 mit

$$\rho((1\,2\,3\,4)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Dann ist ρ reduzibel.

- Zerlegung der Darstellungen $\rho_6 \wedge \rho_6$, $\rho_6 \cdot \rho_6$ und $\rho_3 \otimes \rho_6$