

Übungen zur Topologie

SS06

Aufgabe 28:

Sei G eine Gruppe von Homöomorphismen eines topologischen Raumes X . Die Operation von G auf X heisst *fixpunktfrei*, falls gilt

$$g(x) = x \implies g = e \quad \text{für } g \in G \text{ und } x \in X.$$

- a) Sei X Hausdorffsch und G eine endliche Gruppe von Homöomorphismen von X , die fixpunktfrei auf X operiert. Zeigen Sie, dass die Operation echt unstetig ist.

Es bezeichne $L(p, q)$ den Linsenraum zu $p, q \in \mathbb{N}$, p, q relativ prim, wie in der Vorlesung definiert.

- b) Verifizieren Sie, dass die Operation von $\mathbb{Z}_p$ auf S^3 mit Bahnenraum $L(p, q)$ echt unstetig ist.
- c) Zeigen Sie folgende Aussagen:
- i) $L(2, 1)$ ist homöomorph zu $\mathbb{RP}^3$.
 - ii) Ist p Teiler von $q - q'$, so ist $L(p, q)$ homöomorph zu $L(p, q')$.

Aufgabe 29:

Diese Aufgabe füllt die verbliebenen Lücken im Beweis von Satz 8.26 aus der Vorlesung (Existenz von Überlagerungen zu gegebenen charakteristischen Untergruppen).

Sei Y wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend, und $y_0 \in Y$.

- a) Zeigen Sie, dass nachfolgend definierte Menge eine Basis der Topologie auf Y ist:

$$\mathcal{B}_Y := \{ U \subseteq Y \mid U \text{ offen, wegzusammenhängend und } i_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(Y) \text{ trivial} \}.$$

- b) Die zu konstruierende universelle Überlagerung wird als Menge beschrieben durch

$$X := \{ [\gamma] \mid \gamma : I \rightarrow Y \text{ mit } \gamma(0) = y_0 \}.$$

Für $[\gamma] \in X$ und $U \in \mathcal{B}_Y$ mit $\gamma(1) \in U$ definiert man

$$([\gamma], U) := \{ [\beta] \in X \mid \beta = \gamma \cdot \gamma', \gamma' \text{ Weg in } U \}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B}_X := \{ ([\gamma], U) \mid [\gamma] \in X, U \in \mathcal{B}_Y \text{ mit } \gamma(1) \in U \}$$

Basis einer Topologie auf X ist.

- c) Sei H Untergruppe von $\pi_1(Y, y_0)$. Zeigen Sie, dass folgende Relation auf X eine Äquivalenzrelation ist:

$$[\gamma] \sim [\gamma'] : \Leftrightarrow \gamma(1) = \gamma'(1) \text{ und } [\gamma \cdot (\gamma')^{-1}] \in H.$$

Abgabe: Dienstag, 25.07.2006 in der Vorlesung.

Für weitere Informationen (Scheinausgabe, Prüfungen, etc.) beachten Sie bitte die Webseite der Vorlesung:

<http://www.igt.uni-stuttgart.de/AbGeoTop/Feichtner/topology>

**Wir wünschen allen einen schönen und erfolgreichen
vorlesungsfreien Sommer!**