Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04

Klausur zur Modulprüfung im Studiengang Bachelor Systems Engineering

Aufgabe 1
Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabellle, daß die Aussagenverknüpfung
$\left((A \to B) \to \left((\neg B) \to (\neg A)\right)\right)$ eine Tautologie ist.

Aufgabe 2
Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}:\ n+1=1+n$
und benutzen dabei nur das Assoziativgesetz für die Addition natürlicher Zahlen, aber keinesfalls das Kommutativgesetz.

Aufgabe 3
Finden Sie zwei verschiedene komplexe Zahlen, für die gilt: $z^2 = -i$

Aufgabe 4

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ -4 & 5 & -6 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

a) Zeigen Sie, daß die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

b) Berechnen Sie die zu A inverse Matrix. Führen Sie die notwendigen elementaren Zeilenumformungen explizit durch.

c) Sei $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie explizit einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $Ax = b$.

Aufgabe 5

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$?

Aufgabe 6
Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x\sin(x^2),\quad g:]0,\infty[\to \mathbb{R},\ g(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Aufgabe 7
Benutzen Sie den Mittelwertsatz um zu zeigen:
a) Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist $\forall x \in]a,b[:\ f'(x)=0$, so folgt :
f ist konstant.
b) Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist $\forall x \in]a,b[:\ f'(x)>0$, so folgt :
$\forall x,y \in [a,b]:\ x<y \to f(x)<f(y)$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Aussage in a): $\forall x \in \mathbb{R}: \; \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Aufgabe 8

Die Abbildung $f: \left]-1,1\right[\to \left]-1,3\right[$, $f(x) = x^3 + x + 1$ ist bijektiv. Sei g die Umkehrfunktion. Offenbar ist $f(0) = 1$. Benutzen Sie den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion, um $g'(1)$ zu berechnen.

Aufgabe 9

Benutzen Sie die Regel von l'Hôpital, um $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3}$ zu berechnen.

Aufgabe 10

Finden Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion $f(x) = x^3 - x + 1$ im Intervall $\left]-1,1\right[$.

Aufgabe 11

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \\ \exp\left(x^2 + y^2\right) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Ableitungsmatrix $Df\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 12

Finden Sie alle kritischen Punkte der Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Berechnen Sie für jeden Punkt des $\mathbb{R}^2$ die Matrix der zweiten Ableitungen. Begründen Sie, warum in keinem kritischen Punkt ein lokaler Extremwert vorliegt.