Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2001 — Übung 1 — 19.04.2001
Abgabe: 26.04.2001

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie den Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) der folgenden Differentialoperatoren in zwei Raumkoordinaten, evtl. in Abhängigkeit von $x, u, \nabla u$.

a) $u_{x_1 x_1} + sin(x_1) u_{x_2 x_2}$,

b) $u_{x_1 x_2}$,

c) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$,

d) $u_t - \Delta \beta(u)$ mit $\beta(s) = \min(s, 0) + \max(s - 1, 0)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Konsistenzabschätzungen:

a) Für $u \in C^3[x-h, x+h]$ ist

$$\left| u'(x) - \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \right| \leq \frac{1}{6} h^2 \|u'''\|_\infty.$$

b) Für $u \in C^4[x-h, x+h]$ ist

$$\left| u''(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right| \leq \frac{1}{12} h^2 \|u^{(4)}\|_\infty.$$

c) Für $u \in C^{3,1}[x-h, x+h]$ ist

$$\left| u''(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right| \leq c h^2 \mathrm{Lip}(u''').$$

Dabei bezeichnet $\|v\|_\infty = \max\{|v(y)| : x - h \leq y \leq x + h\}$
und $\mathrm{Lip}(v) = \max\{\frac{|v(y) - v(z)|}{|y - z|} : y \neq z\}$ die Lipschitzkonstante von v.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zu $\alpha \in (0, 2)$ sei $\Omega = \{(r\cos\phi, r\sin\phi) : 0 < r < 1,\ 0 < \phi < \alpha\pi\}$ das Kreissegment mit Öffnungswinkel $\alpha\pi$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $u(r\cos\phi, r\sin\phi) = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin(\frac{\phi}{\alpha})$ löst das Randwertproblem

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \qquad u = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin(\frac{\phi}{\alpha}) \text{ auf } \partial\Omega.$$

b) Für $\alpha > 1$ ist der Gradient ∇u auf Ω nicht beschränkt, d.h. $u \notin C^1(\bar{\Omega})$.

c) Für alle $\alpha \in (0, 2)$ ist

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 < \infty.$$