

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2001 — Übung 10 — 27.06.2001

Abgabe: 05.07.2001

Aufgabe 30

(6 Punkte)

Zeigen Sie: Die Funktion $s : \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$, definiert durch

$$s(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$s_t - \Delta s = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, \infty).$$

Außerdem gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} s(x, t) dx = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(0)} s(x, t) dx = 0.$$

Aufgabe 31

(6 Punkte)

Zeigen Sie: Zu $u_0 \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ist durch

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy & \text{für } t > 0, \\ u_0(x) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

eine Lösung $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ mit $u_t, u_x, u_{xx} \in C^0(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ des Anfangswertproblems

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

gegeben. Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 30.

Aufgabe 32 Parabolisches Maximumprinzip

(4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $T > 0$. Beweisen Sie, dass eine Lösung $u \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])$ mit $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \in C^0(\Omega \times (0, T))$ von

$$u_t - \Delta u = 0$$

ihr Maximum

$$M = \max_{\bar{\Omega} \times [0, T]} u$$

auf der Menge $(\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$ annimmt.

Tip: Verwenden Sie die Hilfsfunktion $v(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$ mit $\varepsilon > 0$.