Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2001 — Übung 2 — 26.04.2001
Abgabe: 03.05.2001

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie die Konsistenzabschätzung für die gemischte Ableitung

$$\left| \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{u(x_1+h,x_2+h)+u(x_1-h,x_2-h)-u(x_1+h,x_2-h)-u(x_1-h,x_2+h)}{4h^2} \right| \leq Ch^2.$$

Wie glatt muss u sein (d.h. von welchen Ableitungen von u hängt die Konstante C ab?

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{M\times M}$ heißt L_0–*Matrix*, wenn $a_{ij} \leq 0$ für alle $i \neq j$. Sie heißt *inversmonoton*, wenn für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^M$ aus $Ax \leq Ay$ folgt dass $x \leq y$. Eine inversmonotone L_0–Matrix heißt M–*Matrix*.

Zeigen Sie, dass die Systemmatrix $\underline{A}$ zur Finite Differenzen–Methode aus der Vorlesung eine M–Matrix ist.

Die Beziehungen $Ax \leq Ay$ sowie $x \leq y$ sind komponentenweise zu verstehen.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Zeigen Sie die Konsistenzabschätzung auf einem nicht–äquidistanten Gitter:
Für $u \in C^4[x-h_l, x+h_r]$ gilt

$$\left| -u''(x) - \frac{2}{h_l+h_r}\left(\frac{u(x)-u(x+h_r)}{h_r} + \frac{u(x)-u(x-h_l)}{h_l}\right)\right| \leq C(h_l+h_r).$$

Falls für eine Konstante K gilt dass $h_l \leq h_r(1+Kh_r)$ und $h_r \leq h_l(1+Kh_l)$, so folgt

$$\left| -u''(x) - \frac{2}{h_l+h_r}\left(\frac{u(x)-u(x+h_r)}{h_r} + \frac{u(x)-u(x-h_l)}{h_l}\right)\right| \leq C(h_l^2+h_r^2).$$

Ein solches Gitter heißt *lokal äquidistant*.