Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2001 — Übung 4 — 10.05.2001
Abgabe: 17.05.2001

Aufgabe 10 (2 Punkte)
Zeigen Sie: Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist auf dem Sobolev-Raum $H_0^1(\Omega)$ die H^1-Halbnorm $|v|_{H^1} = (\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^{1/2}$ äquivalent zur H^1-Norm $\|v\|_{H^1} = (\int_\Omega |\nabla v|^2 = v^2 dx)^{1/2}$, d.h. es gibt Konstanten $0 < c < C < \infty$ so dass

$$c\,|v|_{H^1} \;\leq\; \|v\|_{H^1} \;\leq\; C\,|v|_{H^1} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Aufgabe 11 (6 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und c_p die *optimale* Poincaré-Konstante (vgl. Lemma 4.3 der Vorlesung).

- Zeigen Sie: Wenn L die minimale Kantenlänge eines Quaders ist, der das Gebiet Ω enthält, dann gilt $c_p \leq \frac{1}{\sqrt{2}} L$.
- Seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators zu Eigenfunktionen $v_i \in H_0^1(\Omega)$, d.h.

  $$\int_\Omega \nabla v_i \nabla w = \lambda_i \int_\Omega v_i w \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

  Die Eigenfunktionen spannen einen dichten Teilraum von $H_0^1(\Omega)$ auf. Zeigen Sie: Es gilt

  $$c_p = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

Aufgabe 12 (2 Punkte)
Beweisen Sie die *Young'sche Ungleichung*:
Für p, q mit $1 < p, q < \infty$ sowie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und alle $a, b \geq 0$ gilt

$$ab \;\leq\; \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Auf dem Raum $X = \{v \in C^1[0,1],\ v(0) = 0\}$ sei das Funktional

$$E(v) \;=\; \frac{1}{2} \int_0^1 p(x) v'(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 q(x) v(x)^2 dx - \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

gegeben mit $p, q, f \in C[0,1]$.

- Stellen Sie die schwache Form der Eulergleichung zu E auf, d.h. welche Gleichung gilt für eine Lösung $u \in X$ des Minimierungsproblems $E(u) = \inf_{v \in X} E(v)$?
- Stellen Sie die starke Form der Eulergleichung zu E auf (falls $u \in C^2(0,1)$ und $p \in C^1[0,1]$). Welche Randbedingung für u gilt in $x = 1$?