Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2001 — Übung 5 — 17.05.2001
Abgabe: 24.05.2001

Aufgabe 14 (4 Punkte)
Sei $-\infty < a < b < \infty$. Für Konstanten σ, ρ, g, β, $|\beta| \le 1$, und $v \in C^2[a,b]$ definiere

$$E(v) = \sigma \int_a^b \sqrt{1+v'^2}dx + \frac{\rho g}{2} \int_a^b v^2 dx - \sigma\beta(v(b) - v(a)).$$

Es sei $u \in C^2[a,b]$ mit $E(u) \le E(v)$ für alle $v \in C^2[a,b]$. Zeigen Sie, dass u das folgende Problem löst:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(\dfrac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right)' & = & \dfrac{\rho g}{\sigma} u \qquad \text{in } (a,b), \\ \dfrac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}(x) & = & \left\{ \begin{array}{ll} +\beta & x = b, \\ -\beta & x = a. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Aufgabe 15 (4 Punkte)
Finden Sie einen Funktionenraum X und ein Funktional $E : X \to \mathbb{R}$, so dass

$$u \in X : \qquad E(u) \le E(v) \quad \forall v \in X$$

das folgende Problem löst:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^4 u(x)}{dx^4} = f(x), \qquad x \in (0,1), \\ u(0) = u''(0) = u'(1) = u'''(1) = 0. \end{array} \right.$$

Aufgabe 16 (Kettenregel für Sobolev-Funktionen) (4 Punkte)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\sup |f'| \le M < \infty$ und $u \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.
Zeigen Sie: Dann ist $f \circ u \in H^1(\Omega)$ und

$$\frac{\partial (f \circ u)}{\partial x_i} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, d.$$

Tip: Approximiere u.

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Wir schreiben $u^+(x) = \max(u(x), 0)$ und $u^-(x) = \min(u(x), 0)$. Zeigen Sie, dass für $u \in H^1(\Omega)$ gilt: $u^+, u^-, |u| \in H^1(\Omega)$ und

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x_i} & u > 0, \\ 0 & u \le 0, \end{array} \right. \qquad \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & u \ge 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} & u < 0, \end{array} \right. \qquad \frac{\partial |u|}{\partial x_i} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x_i} & u > 0, \\ 0 & u = 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i} & u < 0. \end{array} \right.$$

Tip: Definiere $f_\varepsilon(s) := \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{s^2+\varepsilon^2} - \varepsilon & s > 0, \\ 0 & s \le 0 \end{array} \right.$ und wende Aufgabe 16 auf f_ε an.