Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2001 — Übung 6 — 22.05.2001
Abgabe: 31.05.2001

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Maximumprinzip:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, und $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung des Problems

$$-\Delta u + c\,u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit $f \in L^2(\Omega)$ und $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$, d.h.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + c\,u\,\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Dann gilt: Ist $f \leq 0$, so ist auch $u \leq 0$.

Tip: Testen der Gleichung mit u^+, vgl. Aufgabe 17.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Funktional

$$E(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - \int_0^1 v\,dx \quad \text{mit} \quad a(v,w) := \int_0^1 x^2 v'(x) w'(x)\,dx$$

keine Lösung des Variationsproblems

$$u \in H_0^1(0,1): \quad E(u) = \inf_{v \in H_0^1(0,1)} E(v)$$

existiert.

Aufgabe 20 (6 Punkte)

Sei S ein nicht entartetes d-dimensionales Simplex im $\mathbb{R}^d$ mit Eckpunkten $a_0, \ldots, a_d$.
Zeigen Sie: Es gibt genau eine affine Abbildung $F : S_0 \to S$, $F(\bar{x}) = A\bar{x} + b$ mit einer $d \times d$-Matrix A, $\det A \neq 0$, und einem $b \in \mathbb{R}^d$ so dass $F(e_j) = a_j, j = 0, \ldots, d$. Ausserdem gelten die Abschätzungen

$$|A| \leq \frac{h(S)}{\rho(S_0)}, \qquad |A^{-1}| \leq \frac{h(S_0)}{\rho(S)}$$

und

$$|\det A| = \frac{|S|}{|S_0|}, \qquad c(d)\rho(S)^d \;\leq\; |\det A| \;\leq\; c(d)h(S)^d$$

mit einer nur von der Dimension d abhängigen Konstante c.