Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

# Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2001 — Übung 7 — 31.05.2001
Abgabe: 14.06.2001

**Aufgabe 21** (4 Punkte)
a) Sei $\hat{S}$ der zweidimensionale Einheitssimplex und $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ seien die linearen Polynome mit $\hat{\varphi}_i(\hat{a}_j) = \delta_{i,j},\ i, j = 0, 1, 2$. Berechnen Sie

$$\left( \int_{\hat{S}} \nabla \hat{\varphi}_i \nabla \hat{\varphi}_j \right)_{i,j=0,1,2}.$$

b) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{S}$ eine nicht degenerierte Triangulierung von $\Omega$. $S$ sei ein Dreieck der Triangulierung mit Eckpunkten $a_0, a_1, a_2$ und $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ seien die linearen Funktionen mit $\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j},\ i, j = 0, 1, 2$. Berechnen Sie mit Hilfe der affin linearen Transformation $F_S : \hat{S} \to S$ und a) die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\left( \int_{S} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \right)_{i,j=0,1,2}.$$

**Aufgabe 22** (6 Punkte)
Sei $S$ ein Simplex im $\mathbb{R}^d$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_d(x)$. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d+1}$

$$\int_S \lambda^\alpha(x)\, dx = \frac{\alpha!\, d!}{(|\alpha| + d)!} |S|$$

gilt. Dabei ist $\lambda^\alpha = \lambda_0^{\alpha_0} \cdot \ldots \cdot \lambda_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_d$ und $\alpha! = \alpha_0! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!$.

Tip: Induktion über $d$.

**Aufgabe 23** ($L^2$-Projektion) (4 Punkte)
Es sei $\mathcal{S}$ eine konforme und nicht degenerierte Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $X_h = \{v_h \in L^2(\Omega) \ :\ v_h|_{\mathring{S}} \in \mathbb{P}_k(\mathring{S})$ für alle $S \in \mathcal{S}\}$.
Zeigen Sie: Zu jedem $u \in L^2(\Omega)$ gibt es genau ein $u_h \in X_h$, so dass

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt. $u_h$ ist die eindeutige Lösung von

$$\int_\Omega u_h \varphi_h = \int_\Omega u \varphi_h \qquad \forall \varphi_h \in X_h.$$

Außerdem gilt für $u \in H^1(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \le c\, h(\mathcal{S}) \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

mit $h(\mathcal{S}) = \max_{S \in \mathcal{S}} h(S)$.