

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2001 — Übung 8 — 14.06.2001

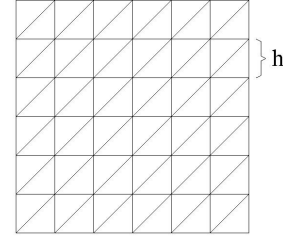
Abgabe: 21.06.2001

Aufgabe 24

(4 Punkte)

Sei $\Omega = (0, 1)^2$ trianguliert durch die rechts skizzierte Triangulierung $\mathcal{S}$ mit Gitterweite $h = \frac{1}{n}$. Seien ϕ_{ij} , $i, j = 0, \dots, n$ die Knotenbasisfunktionen der stückweise linearen Elemente auf $\mathcal{S}$ zu den Punkten $a_{ij} = \begin{pmatrix} ih \\ jh \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix

$$A = \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_{ij} \cdot \nabla \phi_{kl} \right)_{i,j,k,l=1,\dots,n-1}.$$



Aufgabe 25

(8 Punkte)

Sei $\mathcal{S}$ eine konforme, nicht degenerierte Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Sei $S \in \mathcal{S}$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda_{j,S}$. Definiere $\psi_S : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\psi_S = \begin{cases} (d+1)^{d+1} \prod_{j=0}^d \lambda_{j,S} & \text{auf } S, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist E ein innerer $(d-1)$ -Seitensimplex von S (gegenüber Eckpunkt i) und S' der Nachbar an E von S , definiere $\omega_E = S \cup S'$ und $\psi_E : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\psi_E = \begin{cases} d^d \prod_{j \neq i} \lambda_{j,S} & \text{auf } S, \\ d^d \prod_{j \neq i'} \lambda_{j,S'} & \text{auf } S', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Für alle $S \in \mathcal{S}$ und $E \subset \partial S \cap \Omega$ gilt $\psi_S, \psi_E \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \leq \psi_S, \psi_E \leq 1$, $\max \psi_S = \max \psi_E = 1$, $\text{supp } \psi_S = S$, $\text{supp } \psi_E = \omega_E$. Ferner gelten für $q \in \mathbb{P}_k(S)$, $k \geq 1$, folgende Abschätzungen:

- i) $\|\psi_S^{1/2} q\|_{L^2(S)} \geq c \|q\|_{L^2(S)},$
- ii) $\|\psi_S q\|_{L^2(S)} \leq \|q\|_{L^2(S)},$
- iii) $\|\nabla(\psi_S q)\|_{L^2(S)} \leq \frac{c}{h(S)} \|q\|_{L^2(S)}.$

Weiterhin gibt es einen Fortsetzungsoperator $F_E : \mathbb{P}_k(E) \rightarrow C^0(S)$, so dass für alle $q \in \mathbb{P}_k(E)$ gilt:

- i) $\|\psi_E^{1/2} q\|_{L^2(E)} \geq c \|q\|_{L^2(E)},$
- ii) $\|\psi_E F_E(q)\|_{L^2(S)} \leq c h(S)^{1/2} \|q\|_{L^2(E)},$
- iii) $\|\nabla(\psi_E F_E(q))\|_{L^2(S)} \leq \frac{c}{h(S)^{1/2}} \|q\|_{L^2(E)}.$