

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2001 — Übung 9 — 21.06.2001

Abgabe: 28.06.2001

Das Neumann-Problem für die Poisson-Gleichung

Sei im folgenden $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \leq 3$) ein beschränktes, polygonales Gebiet.

Aufgabe 26

(4 Punkte)

Sei $u \in H^2(\Omega)$ Lösung des Neumann-Problems

$$(N) : \quad -\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie: Dann gilt

$$\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g = 0$$

und zwei Lösungen $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$ unterscheiden sich nur um eine Konstante, d.h. $\exists c \in \mathbb{R} : u_1 = u_2 + c$. Sei $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ mit der Norm $\|v\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} := \inf_{c \in \mathbb{R}} \|v + c\|_{H^1(\Omega)}$ versehen. Zeigen Sie weiterhin: Zu jedem Paar $(f, g) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ mit $\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g = 0$ gibt es genau eine schwache Lösung des Neumann-Problems (N), d.h. genau ein $u \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ mit

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi + \int_{\partial\Omega} g \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Aufgabe 27

(4 Punkte)

Sei $\mathcal{S}$ eine zulässige Triangulierung von Ω und $X_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_S \in \mathbb{P}_1 \forall S \in \mathcal{S}\}$. Seien $f \in L^2(\Omega), g \in H^1(\Omega)$ mit $\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g = 0$. Zeigen Sie: Dann gibt es genau eine Lösung $u_h \in X_h$ mit $\int_{\Omega} u_h = 0$ des diskreten Problems

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \nabla \varphi_h = \int_{\Omega} f \varphi_h + \int_{\partial\Omega} g \varphi_h \quad \forall \varphi_h \in X_h.$$

Falls zusätzlich $u \in H^2(\Omega)$, dann gibt es ein $c > 0$ so dass

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c h |u|_{H^2(\Omega)}.$$

Aufgabe 28

(4 Punkte)

Zeigen Sie: Ersetzt man im diskreten Problem aus Aufgabe 26 die Funktion g durch

$$g_h := Ig - \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\partial\Omega} Ig + \int_{\Omega} f \right),$$

so gilt für $g \in H^2(\Omega)$ die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c h (|u|_{H^2(\Omega)} + |g|_{H^2(\Omega)}).$$

Dabei ist $Ig \in X_h$ die Interpolierende zu g .

Zum diskreten Maximumprinzip für lineare Finite Elemente Funktionen

Aufgabe 29

(4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zulässig trianguliert durch $\mathcal{S}$ und $(\varphi_i)_{i=1,\dots,N}$ die Knotenbasis zu den stückweise linearen Finiten Elementen auf $\mathcal{S}$. Zeigen Sie: Wenn gelten soll

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \leq 0 \quad \forall i \neq j$$

dann muss die Triangulierung $\mathcal{S}$ *schwach spitz* sein, d.h. für je zwei benachbarte Dreiecke $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ mit gemeinsamer Kante $E = S_1 \cap S_2$ darf die Summe der beiden Winkel in S_1, S_2 gegenüber E nicht größer als 180° sein.