Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Praktikum Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — 22.04.2002
Abgabe: Mittwoch, 08.05.2002

Programmieraufgabe 1 (6 Punkte)

Implementieren Sie das Finite Differenzen Verfahren für das Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega = (A,B)^2, \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Verwenden Sie den aus der Vorlesung bekannten 5-Punkte-Stern.
Die Lösung des linearen Gleichungssysmems soll mit dem CG-Verfahren (mit dünn besetzter (*sparse*) Matrix) erfolgen. Stellen Sie die Lösung graphisch dar (z. B. mit Hilfe der Funktion `mesh()` in Matlab).

a) Testen Sie das Programm anhand der Funktion

$$u(x_1, x_2) = \sin(x_1) * \cos(2\pi x_2)$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$. Berechnen Sie den maximalen Fehler in einem Gitterpunkt und untersuchen Sie die Fehlerabnahme bei Halbierung der Schrittweite, für $h = \frac{1}{N}$ mit $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$.
Was passiert im Fall $u(x_1, x_2) = x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)$?

Programmieraufgabe 2 (6 Punkte)

Erweitern Sie das Programm aus Aufgabe 1 zur Lösung des Problems

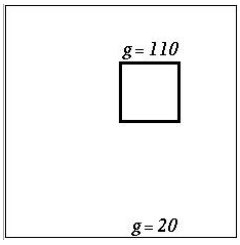
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \subset (A,B)^2, \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

auf einem nicht-rechteckigen Gebiet Ω. Dieses sei durch eine Funktion $\Phi(x)$ beschrieben so dass $\Omega = \{x \in (a,b)^2 : \Phi(x) > 0\}$.

a) Welche Konvergenzraten beobachten Sie für die exakte Lösung aus Aufgabe 1a auf dem Kreis mit Radius 0.8 um den Ursprung (z.B. mit $\Phi(x) = 0.8 - |x|$)?
Beachten Sie die Diskretisierung der Dirichlet-Randwerte: $g_h(p_{ij}) = g(p)$ mit $p \in \partial\Omega$, $|p - p_{ij}| < h$.

b) Lösen Sie mit Ihrem Programm das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega = (-1,1)^2 \setminus ([0,1] \times [-1,0]), \\ u(r\cos\phi, r\sin\phi) &= r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\phi) \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Welche Konvergenzraten beobachten Sie hier?

c) Berechnen Sie die Wärmeverteilung in einem quadratischen Raum mit eingebautem Saunaofen, so dass $\Omega = (0,1)^2 \setminus [0.50, 0.75]^2$, ohne innere Wärmequelle (also mit $f = 0$) mit den folgenden Temperaturrandwerten:
Am Rand des Ofens ist die Temperatur gleich $g = 110$, an den Wänden gilt $g = 20$.