Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt

Höhere Mathematik IV

SS 2007 — Übung 9 — 15.06.2007
Abgabe: 22.06.2007

Aufgabe 24 (5 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe eines Fourier-Reihen-Ansatzes eine periodische Lösung der Differentialgleichung

$$-u''(x) + u(x) = |sin(x)|, \quad x \in (-\pi, +\pi).$$

Aufgabe 25 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome

$$L_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ein Orthogonalsystem in $L_2(-1,1)$ bilden, dass also gilt:

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\, dx = 0 \quad \text{für } n \neq m.$$

Bemerkung (nicht zu zeigen): Die Legendre-Polynome bilden eine Hilbert-Basis von $L_2(-1,1)$.

Aufgabe 26 (10 Punkte)
Seien $f, g \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln für die Fouriertransformation:

a) $(\alpha f + \beta g)\hat{} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

b) $(\bar{f})\hat{}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$,

c) $(f(\alpha t))\hat{}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}(\frac{\omega}{\alpha})$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

d) $(f(t-t_0))\hat{}(\omega) = e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$ für $t_0 \in \mathbb{R}$,

e) $(e^{-i\omega_0 t} f(t))\hat{}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$ für $\omega_0 \in \mathbb{R}$.