

Seminar Numerik nichtlinearer partieller
Differentialgleichungen – das Signorini-Problem

Christian Fröbel
`cfroebel@math.uni-bremen.de`

Bremen, den 25. Oktober 2002

1 Einleitung

Gegenstand der Betrachtungen soll ein Körper sein, der unter Kraftereinwirkung verformt wird. Diese Verformung soll zusätzlich durch ein Hindernis begrenzt sein. Es wird jedoch nur der Fall betrachtet werden, wo zwischen Körper und Hindernis keine Reibung auftritt.

Dies wird uns zu einer klassischen nichtlinearen Randwertaufgabe führen, deren schwache Formulierung eine Variationsungleichung ist. Um anschließend Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen, werden wir einige Hilfsmittel aus der konvexen Analysis verwenden.

Um ein Verständnis für die Modellierung derartiger Probleme zu bekommen und um die entstehenden PDEs zu interpretieren, sind gewisse Kenntnisse aus der linearen Elastizität von Nöten. Im folgenden Kapitel werden daher einige Dinge aus diesem Gebiet skizziert, die wir für unsere Betrachtungen benötigen.

2 Lineare Elastizität

2.1 Bewegung und Verzerrung

Wir betrachten einen Körper beschrieben durch ein Gebiet $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$. Er sei zunächst in seinem undeformierten Zustand. Mit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega}$ bezeichnen wir einen Punkt des Körpers. Unterwirft man den Körper nun bestimmten Kraftwirkungen, so wird er sich verformen. Diese Deformation wollen wir mit φ bezeichnen:

$$\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto x^\varphi := \varphi(x).$$

Bemerkung 2.1. Betrachten wir den Körper $\bar{\Omega}$ im undeformierten Zustand, sprechen wir von der Referenz-Konfiguration mit der zugehörigen Lagrange-Variable x . Auf der anderen Seite sprechen wir von der deformierten Konfiguration $\bar{\Omega}^\varphi := \varphi(\bar{\Omega})$ mit der zugehörigen Euler-Variable x^φ .

Desweiteren kann man die durch die Deformation bestimmte Verschiebung u betrachten, also:

$$\varphi = u + \text{id}.$$

Aus physikalischen Betrachtungen heraus ist klar, dass eine Deformation φ injektiv ist und die Orientierung erhält, also $\det \nabla \varphi(x) > 0$ für alle $x \in \bar{\Omega}$.

Untersuchungen der Deformation φ bzw. der Verschiebung u geben Anlass zur Definition des Lagrange Verzerrungstensors E , mit

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

und des rechten Cauchy Verzerrungstensors C , mit

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Wenn es sich um eine starre Deformation handelt, also φ eine Kombination aus Rotation um den Ursprung und Translation ist, verschwindet E . Daher können wir E als Maß für die wahre Deformation ansehen. Der Cauchy Verzerrungstensor C hingegen beschreibt die Längenänderung unter der Deformation φ .

Zwischen C und E besteht folgender Zusammenhang:

$$C = \text{id} + 2E = \nabla u^T \nabla u.$$

Bemerkung 2.2. Unter Verwendung der Summenkonvention kann man (2.1) bzw. (2.2) auch verkürzend schreiben:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,k} u_{j,k})$$

$$C_{ij} = \varphi_{i,k} \varphi_{j,k}.$$

Unter der Annahme, dass die Deformation φ hinreichend klein ist, können wir die quadratischen Terme der Ableitungen in (2.1) vernachlässigen. Durch diese Linearisierung erhalten wir aus E den Verzerrungstensor ε , der durch

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3)$$

definiert ist.

Bemerkung 2.3. Die Verzerrungstensoren E , C und ε sind symmetrisch.

2.2 Spannung und Equilibrium

Man unterscheidet zwei Arten von Kräften, die auf einen Körper wirken können – Volumen- und Oberflächenkräfte. Bezogen auf die deformierte Konfiguration gibt das Vektorfeld

$$f^\varphi : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x^\varphi \mapsto f^\varphi(x^\varphi)$$

die Volumenkraftdichte pro Volumeneinheit an. Analog dazu gibt das Vektorfeld

$$p^\varphi : \Gamma^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x^\varphi \mapsto p^\varphi(x^\varphi)$$

die Oberflächenkraftdichte pro Flächeneinheit an, wobei $\Gamma^\varphi := \partial\Omega^\varphi$. Üblicherweise wirkt die Oberflächenkraft nur auf einer Teilmenge $\Gamma_N^\varphi \subset \Gamma^\varphi$.

Bemerkung 2.4. Im weiteren Verlauf verwenden wir der Einfachheit halber den Begriff Kraft anstelle von Kraftdichte.

Um nun die Kräfte zu beschreiben, die durch die Deformation φ hervorgerufen werden, ziehen wir das Spannungsprinzip von Euler und Cauchy heran, dessen Aussage die Existenz eines Vektorfeldes t^φ ist, mit

$$t^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x^\varphi, n) \mapsto t^\varphi(x^\varphi, n), \quad S^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\|_2 = 1\},$$

das den Gleichungen

$$\int_{A^\varphi} f^\varphi(x^\varphi) dx^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} t^\varphi(x^\varphi, n(x^\varphi)) dx^\varphi = 0 \quad (2.4a)$$

$$\int_{A^\varphi} x^\varphi \times f^\varphi(x^\varphi) dx^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} x^\varphi \times t^\varphi(x^\varphi, n(x^\varphi)) dx^\varphi = 0 \quad (2.4b)$$

genügt, wobei $A^\varphi \subset \Omega^\varphi$ einen ausreichend glatten Rand haben muss, damit n auf ∂A^φ auch definiert ist. Im Allgemeinen wird t^φ als Spannungsfeld bezeichnet.

Des Weiteren brauchen wir eine Aussage über die Struktur des Spannungsfeldes t^φ . Diese liefert uns das

Theorem 2.5 (Cauchy). *Seien die Volumenkraft f^φ stetig und das Spannungsfeld t^φ stetig differenzierbar bzgl. x^φ für alle $n \in S^2$ und stetig bzgl. n für alle $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$. Dann existiert ein stetig differenzierbares Tensorfeld*

$$T^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad x^\varphi \mapsto T^\varphi(x^\varphi),$$

sodass der Spannungsvektor

$$t^\varphi(x^\varphi, n) = T^\varphi(x^\varphi)n, \quad x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi, \quad n \in S^2$$

genügt und dass gilt:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} T^\varphi(x^\varphi) &= f^\varphi(x^\varphi) & x^\varphi &\in \Omega^\varphi \\ T^\varphi(x^\varphi) &= T^\varphi(x^\varphi)^T & x^\varphi &\in \Omega^\varphi \\ T^\varphi(x^\varphi)n^\varphi(x^\varphi) &= p^\varphi(x^\varphi) & x^\varphi &\in \Gamma_N^\varphi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nach näherer Betrachtung der Equilibriums-Gleichungen (2.5) sehen wir, dass sie ein Randwertproblem in Divergenz-Form darstellen. Eine Aussage über die äquivalente Darstellung als Variationsproblem trifft das

Theorem 2.6 (Virtuelle Arbeit). *Sei $\Gamma_D^\varphi = \Gamma^\varphi \setminus \Gamma_N^\varphi$ der Dirichletrand von Ω^φ und $\gamma_D : H^1(\Omega^\varphi)^3 \rightarrow L_2(\Gamma^\varphi)^3$ der Spuroperator. Für den Raum der Testfunktionen wählen wir*

$$\mathbf{H} := \{v \in H^1(\Omega^\varphi)^3 \mid \gamma_D(v) = 0 \text{ auf } \Gamma_D^\varphi\}.$$

Dann gilt: Jede Lösung $T^\varphi \in C^1(\bar{\Omega}^\varphi)^{3 \times 3}$ von (2.5) erfüllt das Variationsproblem

$$\int_{\Omega^\varphi} T^\varphi : \nabla^\varphi \vartheta^\varphi dx^\varphi = \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot \vartheta^\varphi dx^\varphi + \int_{\Gamma_N^\varphi} p^\varphi \cdot \vartheta^\varphi d\sigma^\varphi \quad \forall \vartheta \in \mathbf{H}, \quad (2.6)$$

wobei $T^\varphi \in H^1(\Omega^\varphi)^{3 \times 3}$, $f \in C(\Omega^\varphi)^3$ und $p \in C^1(\Omega^\varphi)^3$. Und jede ausreichend glatte Lösung $T^\varphi \in C^1(\bar{\Omega}^\varphi)^{3 \times 3}$ von (2.6) erfüllt (2.5).

Bemerkung 2.7. Der Operator ‘:’ bedeutet komponentenweise Multiplikation und anschließende Addition, d. h. falls $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$, ist $A : B = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$.

Beweisidee. Mit $T_i^\varphi = (T_{1i}^\varphi, T_{2i}^\varphi, T_{3i}^\varphi)^T$ bezeichnen wir die i -te Spalte von T^φ , sodass wir die Divergenz in der ersten Gleichung von (2.5) schreiben können als

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_i^\varphi}{\partial x_i^\varphi} dx^\varphi = f^\varphi.$$

Multiplikation mit der Testfunktion $\vartheta^\varphi \in \mathbf{H}$ und Integration über Ω^φ ergibt

$$-\int_{\Omega^\varphi} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_i^\varphi}{\partial x_i^\varphi} \cdot \vartheta^\varphi dx^\varphi = \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot \vartheta^\varphi dx^\varphi.$$

Nach partieller Integration, wobei $n = (n_1, n_2, n_3)^T$ die äußere Einheitsnormale an Γ_N^φ darstellt, erhalten wir

$$-\int_{\Omega^\varphi} \sum_{i=1}^3 T_i^\varphi \cdot \frac{\partial \vartheta^\varphi}{\partial x_i^\varphi} dx^\varphi = \int_{\Gamma_N^\varphi} \sum_{i=1}^3 T_i^\varphi \cdot \vartheta^\varphi n_i d\sigma^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot \vartheta^\varphi dx^\varphi.$$

Nach Ausschreiben des Skalarproduktes als Summe hat man

$$-\int_{\Omega^\varphi} \sum_{i,j=1}^3 T_{ji}^\varphi \frac{\partial \vartheta_j^\varphi}{\partial x_i^\varphi} dx^\varphi = \int_{\Gamma_N^\varphi} \sum_{i,j=1}^3 T_{ji}^\varphi \vartheta_j^\varphi n_i d\sigma^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot \vartheta^\varphi dx^\varphi. \quad (*)$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$T^\varphi : \nabla \vartheta^\varphi = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij}^\varphi \frac{\partial \vartheta_i^\varphi}{x_j^\varphi}$$

und dass nach der dritten Gleichung von (2.5)

$$p^\varphi \cdot \vartheta^\varphi = T^\varphi n^\varphi \cdot \vartheta^\varphi = \sum_{i,j}^3 T_{ij}^\varphi n_j^\varphi \vartheta_i^\varphi$$

auf Γ_N^φ , erhält man aus (*) die Variationsgleichung (2.6).

Unter der Annahme, dass (2.6) eine ausreichend glatte Lösung besitzt – $T^\varphi \in C^1(\bar{\Omega}^\varphi)^{3 \times 3}$ –, ergibt sich die Rückrichtung analog. \square

Leider sind (2.5) und damit auch (2.6) bzgl. der deformierten Konfiguration Ω^φ gegeben, die im Allgemeinen jedoch nicht bekannt ist. Unter Verwendung der Transformation von Piola-Kirchhoff kann (2.5) auf die Referenzkonfiguration Ω zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \Sigma(u(x)) &= f(x) & x \in \Omega \\ \Sigma(u(x)) &= \Sigma(u(x))^T & x \in \Omega \\ \Sigma(u(x))n(x) &= p(x) & x \in \Gamma_N. \end{aligned}$$

Σ ist der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor.

2.3 Materialeigenschaften

Unter der Annahme einer spannungsfreien Referenzkonfiguration gilt für isotropes, homogenes, elastisches Material, dass

$$\Sigma(E) = \lambda(\operatorname{tr} E)I + 2\mu E + o(E).$$

Die beiden Konstanten λ und μ sind die sogenannten Lamé Konstanten.

Vernachlässigen wir nun die Terme höherer Ordnung und ersetzen E durch seine Linearisierung ε , erhalten wir die Linearisierung des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$\sigma(\varepsilon) = \lambda(\operatorname{tr} \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon$$

und erhalten damit die linearen Gleichungen der linearen Elastizität:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u(x)) &= f(x) & x \in \Omega \\ \sigma(u(x)) &= \sigma(u(x))^T & x \in \Omega \\ \sigma(u(x))n(x) &= p(x) & x \in \Gamma_N. \end{aligned} \quad (2.7)$$

3 Das Signorini-Problem

Das Signorini-Problem modelliert den linearisierten Kontakt eines elastischen Körpers mit einem festen Hindernis. Die allgemeine Situation kann man sich wie in Abb. 3.1 vorstellen. Die Tatsache, dass der Teil des Randes, mit dem das Hindernis in Kontakt kommt, nicht bekannt ist, macht das Signorini-Problem nichtlinear.

Bevor wir sowohl die starke als auch die schwache Formulierung des Signorini-Problems angeben, müssen wir uns Gedanken machen, wie wir modellieren, dass der Körper das Hindernis nicht durchdringen darf.

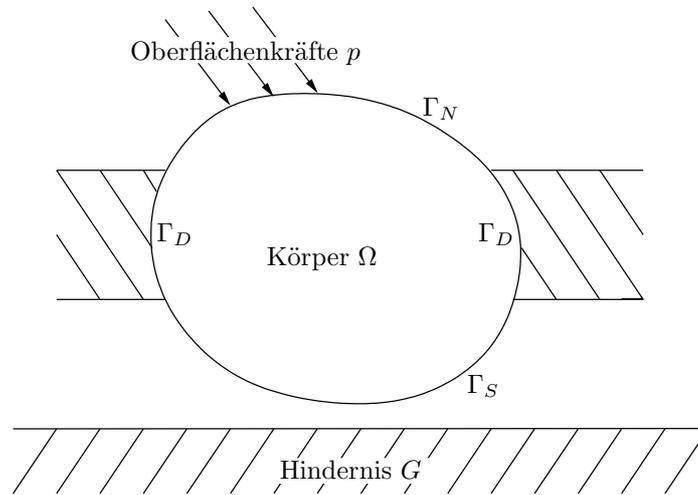


Abbildung 3.1: Allgemeine Situation

3.1 Modellierung

Seien der Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und das Hindernis $G \subset \mathbb{R}^3$ beschränkte Lipschitz-Gebiete.

Der Rand $\Gamma := \partial\Omega$ des Körpers ist in drei disjunkte Teile unterteilt

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_S.$$

Γ_D ist der Teil des Randes, an dem der Körper eingespannt ist, also $u(x) = 0$ für alle $x \in \Gamma_D$, d. h. Γ_D ist Dirichlet-Rand. Der Neumann-Rand Γ_N , auf dem die Oberflächenkräfte wirken. Und schließlich der Signorini-Rand Γ_S , mit dem das Hindernis G möglicherweise in Kontakt kommt. Der Teil des Randes, welcher tatsächlich mit dem Hindernis in Kontakt gerät, ist im Allgemeinen eine echte Teilmenge von Γ_S .

Da Ω und G Lipschitz-Gebiete sind, können wir deren Ränder lokal Lipschitz-stetig parametrisieren.

Für $x \in \partial\Omega$ sei $\eta_x : (x_1, x_2) \mapsto x_3$ die lokale Parametrisierung und für $y \in \partial G$ entsprechend η_y . Wir nehmen hier an, dass beide Punkte ‘dicht’ beieinander liegen, sodass wir für die Parametrisierungen dieselben Koordinatensysteme verwenden können. Abb. 3.2 soll die nun folgenden Überlegungen etwas veranschaulichen.

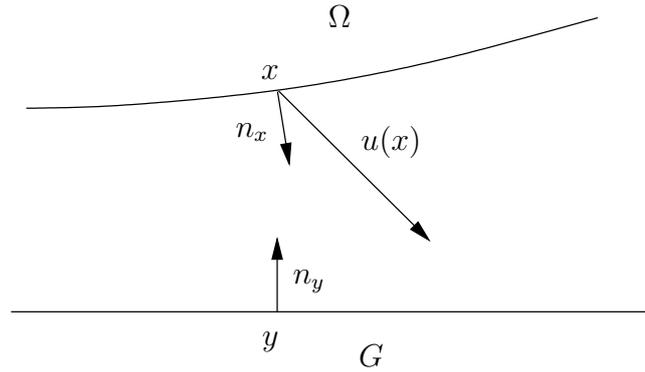


Abbildung 3.2: Der Körper bewegt sich auf das Hindernis zu und darf es nicht durchdringen

Betrachten wir die Verschiebung u für den Moment auch in Bezug auf dieses Koordinatensystem. Dann können wir unsere Bedingung an u , das Hindernis nicht zu durchdringen so formulieren:

$$\eta_x(x_1, x_2) + u_3 \leq \eta_y(x_1 + u_1, x_2 + u_2).$$

Besitzen η_x und η_y stetige erste Ableitungen, so können wir für hinreichend kleine Verschiebungen u linearisieren und erhalten

$$\eta_x(x_1, x_2) + u_3 \leq \eta_y(x_1, x_2) + \left(\frac{\partial \eta_y}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta_y}{\partial x_2} \right) \cdot (u_1, u_2)^T.$$

Umgeschrieben ergibt das

$$\left(-\frac{\partial \eta_y}{\partial x_1}, -\frac{\partial \eta_y}{\partial x_2}, 1 \right) \cdot (u_1, u_2, u_3)^T \leq \eta_y(x_1, x_2) - \eta_x(x_1, x_2).$$

Unter der Beobachtung, dass $\tilde{n}_y = \left(-\frac{\partial \eta_y}{\partial x_1}, -\frac{\partial \eta_y}{\partial x_2}, 1 \right)$ senkrecht zu ∂G im Punkt y steht, erhalten wir die normalisierte Form

$$n_y \cdot (u_1, u_2, u_3)^T \leq G, \quad (3.1)$$

mit

$$G(x) = \frac{\eta_y(x_1, x_2) - \eta_x(x_1, x_2)}{\|\tilde{n}_y\|_2},$$

dem Spalt zwischen Ω und G normalisiert bzgl. n_y .

Jetzt haben wir nur noch das Problem, dass der Punkt y , in dem wir die äußere Normale an ∂G bestimmen müssen, unbekannt ist. Kleine Deformationen vorausgesetzt, können wir (3.1) auch bzgl. n_x formulieren:

$$n_x \cdot (u_1, u_2, u_3)^T \leq g, \quad (3.2)$$

mit

$$g(x) = \frac{\eta_y(x_1, x_2) - \eta_x(x_1, x_2)}{\|\tilde{n}_x\|_2} \quad \text{und} \quad \tilde{n}_x = \left(-\frac{\partial \eta_x}{\partial x_1}, -\frac{\partial \eta_x}{\partial x_2}, 1 \right).$$

3.2 Starke Formulierung

$$-\sigma_{ij}(u)_{,j} = f_i \quad \text{in } \Omega \quad (3.3a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_N(u) \leq 0 \\ \sigma_T(u) = 0 \\ \sigma_N(u)(u \cdot n - g) = 0 \\ u \cdot n - g \leq 0 \end{array} \right\} \quad \text{auf } \Gamma_S \quad (3.3b)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D \quad (3.3c)$$

$$\sigma_{ij}(u) \cdot n_j = p_i \quad \text{auf } \Gamma_N \quad (3.3d)$$

Bemerkung 3.1. Der linearisierte Spannungstensor wird in Normal- und Tangentialteil zerlegt. Dabei ist σ_N ein Skalar und σ_T ein Vektor, sodass gilt $\sigma n = \sigma_N n + \sigma_T$. Also $\sigma_n = n^T \sigma n = \sigma_{ij} n_i n_j$.

Bemerkung 3.2. Die Symmetrie von σ ist schon in (3.3a) enthalten. Sie ist durch die Materialeigenschaften des zu Grunde liegenden Körpers begründet.

Die Gleichung (3.3a) entspricht den ersten beiden Gleichungen in (2.7).

Gl. 1 in (3.3b) spiegelt die Tatsache wider, dass wir auf Γ_S im Falle von Kontakt nur kompressive Spannungen in Normalenrichtung haben und überall sonst die Spannungen verschwinden. Außerdem betrachten wir nur reibungslose Vorgänge, sodass die Spannungen in Tangentialrichtung verschwinden (Gl. 2 in (3.3b)).

Gl. 4 in (3.3b) entspricht (3.2).

Und schließlich bringt Gl. 3 in (3.3b) zum Ausdruck, das wir den Bereich des tatsächlichen Kontakts a-priori nicht kennen. Konkret wird der Fall ausgeschlossen, wo der Normalteil der Spannung $\sigma_N < 0$ ist, obwohl kein Kontakt auftritt, also $u \cdot n < g$.

Gleichung (3.3d) entspricht Gl. 3 in (2.7).

3.3 Schwache Formulierung

Im Folgenden sei $\mathbf{H}^1(\Omega) := H^1(\Omega)^3$ und $\mathbf{L}^2(\Omega) := L^2(\Omega)^3$. Mit Hilfe des Spuoperators

$$\gamma_D : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma_D)$$

und

$$\mathbf{H} := \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \gamma_D(v) = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$$

definieren wir den Raum der Testfunktionen

$$\mathbf{K} := \{v \in \mathbf{H} \mid v \cdot n \leq g \text{ auf } \Gamma_S\}.$$

\mathbf{K} ist konvexe Teilmenge von \mathbf{H} . Für beliebiges $v \in \mathbf{K}$ multiplizieren wir (3.3a) mit $v - u \in \mathbf{H}$, integrieren partiell und erhalten

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)(v_i - u_i)_{,j} dx = \int_{\Omega} f_i(v_i - u_i) dx + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u)n_j(v_i - u_i) ds.$$

Das gibt Anlass, die symmetrische Bilinearform $a : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)v_{i,j} dx$$

zu definieren, mit der (3.3) wie folgt geschrieben werden kann:

$$a(u, v - u) = (f, v - u)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma(u)n, v - u)_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}.$$

Das Randintegral zerlegen wir nun in drei Teile

$$\begin{aligned} (\sigma(u) \cdot n, v - u)_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} &= (\sigma(u)n, v - u)_{\mathbf{L}^2(\Gamma_D)} \\ &\quad + (\sigma(u)n, v - u)_{\mathbf{L}^2(\Gamma_N)} \\ &\quad + (\sigma(u)n, v - u)_{\mathbf{L}^2(\Gamma_S)}. \end{aligned}$$

Der erste Teil verschwindet, da $v - u \in \mathbf{H}$. Der zweite Teil lässt sich wegen (3.3d) schreiben als $(p, v - u)_{\mathbf{L}^2(\Gamma_N)}$. Für den letzten Teil auf Γ_S erhalten wir schließlich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sigma(u)n \cdot (v - u) &= (\sigma_N(u)n + \sigma_T) \cdot (v - u) \\ &= \sigma_N(u)n \cdot (v - u) \\ &= \sigma_N(u)(v \cdot n - u \cdot n + g - g) \\ &= \sigma_N(u)(v \cdot n - g) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\sigma_N(u) \leq 0$ und $\sigma_T(u) = 0$ auf Γ_S , $v \in \mathbf{K}$. Und außerdem haben wir Gl. 3 in (3.3b) benutzt.

Insgesamt erhalten wir damit die Variationsungleichung

$$u \in \mathbf{K} : \quad a(u, v - u) \geq f(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{K}, \quad (3.4)$$

mit $f \in \mathbf{H}^*$ wie folgt

$$f(v) := (f, v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (p, v)_{\mathbf{L}^2(\Gamma_N)}.$$

Mit dem dazugehörigen auf \mathbf{K} konvexen und differenzierbaren Energiefunktional $J : \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v),$$

also

$$J'(u) = a(u, \cdot) - f(\cdot) \in \mathbf{H}^*,$$

könnten wir folgendes Lemma anwenden.

Lemma 3.3. *Es sei $J : \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}$ ein auf \mathbf{K} konvexes und Gâteaux-differenzierbares Funktional. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

$$(i) \quad J(u) = \inf_{v \in \mathbf{K}} \{J(v)\}$$

$$(ii) \quad \langle J'(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}.$$

Stattdessen wollen wir nun (3.4) auf den ganzen Raum \mathbf{H} ausweiten. Dazu führen wir die charakteristische Funktion $\varphi_K : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ein,

$$\varphi_K(v) := \begin{cases} 0 & : \quad v \in \mathbf{K} \\ +\infty & : \quad v \notin \mathbf{K} \end{cases}$$

und schreiben (3.4) als

$$u \in \mathbf{H} : \quad a(u, v - u) + \varphi_K(v) - \varphi_K(u) \geq f(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{H}. \quad (3.5)$$

Es werden also alle $v \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{K}$ 'bestraft'. Ebenso definieren wir das Energiefunktional $\bar{J} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$\bar{J}(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - f(u) + \varphi_K(u).$$

Um eine Aussage über die Konvexität von \bar{J} zu haben, zitieren wir

Theorem 3.4. *Das Funktional $\bar{J} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist genau dann konvex, wenn \mathbf{K} konvex ist und das Funktional $J : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex ist.*

Da also \mathbf{K} konvex und J auch konvex auf \mathbf{H} , ist auch \bar{J} konvex auf \mathbf{H} . Leider ist \bar{J} wegen des charakteristischen Funktionals φ_K auf \mathbf{H} nicht Gâteaux-differenzierbar, sodass Lemma 3.3 nicht anwendbar ist. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, führen wir das Subdifferential einer Funktion ein. Das Subdifferential ist eine mengenwertige Abbildung und wie folgt definiert.

Definition 3.5. *Seien $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum und $G : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$. Dann ist das Subdifferential von G an der Stelle u die Menge*

$$\partial G(u) := \{\xi \in H \mid \forall v \in H : G(v) - G(u) \geq (\xi, v - u)_H\}.$$

Die Elemente $\xi \in \partial G(u)$ werden Subgradienten genannt.

Bemerkung 3.6. Ist G konvex und Gâteaux-differenzierbar, so gilt $\partial G(u) = \{G'(u)\}$.

Beispiel 3.7. Für die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist $\partial f(x)$ in Abb. 3.3 dargestellt. Das Minimum von f ist also nicht durch $f'(x) = 0$ charakterisiert, da $f'(x)$ in 0 nicht definiert ist, sondern durch $0 \in \partial f(x)$.

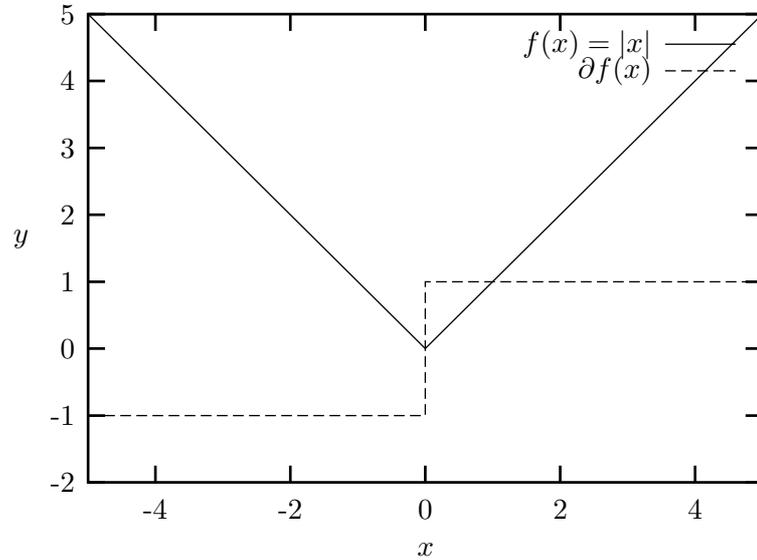
Nun können wir (3.5) auch so formulieren

$$0 \in \partial \bar{J}(u)$$

bzw. so

$$a(u, \cdot) - f(\cdot) \in \partial \varphi_K(u).$$

Bevor wir nun Existenz und Eindeutigkeit zeigen, benötigen wir noch eine Charakterisierung von φ_K , die uns folgende Definition liefert.

Abbildung 3.3: Subdifferential für $f(x) = |x|$

Definition 3.8. Sei H ein reeller Hilbert-Raum. Ein Funktional $G : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt schwach unterhalbstetig (l.s.c.), wenn für jede Folge $v_k \rightarrow v$ in H gilt

$$\underline{\lim} G(v_k) \geq G(v).$$

Weiterhin heißt G zulässig, wenn $G \not\equiv +\infty$.

Beispiel 3.9. Im reellen betrachten wir die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ -1 & : x = 0 \end{cases}$$

Der kritische Punkt ist $x = 0$, da f stetig für $x \neq 0$. Für jede Folge $x_k \rightarrow 0$ gilt $\underline{\lim} x_k \in [-1, 1]$. Also ist f l.s.c.

Beispiel 3.10. Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

ist nicht l.s.c.

Beispiel 3.11. Sei I ein Intervall. Dann ist $f : I \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$,

$$f(x) := \begin{cases} 0 & : x \in I \\ +\infty & : x \notin I \end{cases}$$

l.s.c. genau dann wenn I abgeschlossen ist.

Die Menge \mathbf{K} ist abgeschlossen. Außerdem ist sie für jedes ordentlich gestellte Problem nicht leer. Daher ist φ_K l.s.c. und zulässig, sodass wir nun in der Lage sind, ein Theorem anzugeben, wonach Existenz und Eindeutigkeit des Signorini-Problems gesichert sind.

Theorem 3.12. *Sei $a : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische stetige und \mathbf{H} -elliptische Bilinearform. Seien weiterhin $f \in \mathbf{H}^*$ und $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex, l.s.c. und zulässig. Und sei $\bar{J}(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + \varphi(v) - f(v)$. Dann hat das Minimierungs-Problem*

$$\bar{J}(u) = \inf_{v \in \mathbf{H}} \{\bar{J}(v)\}$$

eine eindeutige Lösung, die durch (3.5) charakterisiert ist.

3.4 Diskretisierung und Fehlerabschätzung

In diesem Abschnitt führen wir die Diskretisierung für die numerische Approximation des Signorini-Problems ein und geben eine a-priori Fehlerabschätzung.

Wir betrachten eine Galerkin Approximation des Hilbertraumes \mathbf{H} , also eine Folge $(\mathbf{S}^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ von endlich dimensionalen Unterräumen $\mathbf{S}^{(j)} \in \mathbf{H}$, mit

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{S}^{(j)}}^{\|\cdot\|_{\mathbf{H}}} = \mathbf{H}.$$

Weiterhin sei $T^{(j)}$ die zugehörige Zerlegung des Gebietes Ω in Tetraeder t mit maximalem Durchmesser $h^{(j)} = \mathcal{O}(2^{-j})$, für $t \rightarrow \infty$. Die Menge der Knoten in $\Omega \cup \Gamma_N \cup \Gamma_S$ bezeichnen wir mit $P^{(j)}$ und deren Anzahl mit $n^{(j)} = \#P^{(j)}$.

Die Unterräume $\mathbf{S}^{(j)}$ werden nun aufgespannt von $3n^{(j)}$ linear unabhängigen Funktionen $\lambda_{p,i} \in \mathbf{H}$, wobei $p \in P^{(j)}$ und $i = 1, 2, 3$, also kurz

$$\mathbf{S}^{(j)} = \text{span}\{\lambda_{p,i} \mid p \in P^{(j)}, i = 1, 2, 3\}. \quad (3.6)$$

Speziell wählen wir für $\lambda_{p,i}$ lineare und stückweise stetige Funktionen, mit $\lambda_{p,i}(q) = \delta_{pq}e_i$, $p, q \in P^{(j)}$, wobei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die kanonische Basis der \mathbb{R}^3 darstellt. Damit läßt sich jede Funktion $v \in \mathbf{S}^{(j)}$ darstellen als

$$v = \sum_{\substack{p \in P^{(j)} \\ i \in \{1,2,3\}}} \alpha_{p,i} \lambda_{p,i}.$$

Für die so gewählte Folge $(\mathbf{S}^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ läßt sich eine Approximationseigenschaft – auch bekannt als Jackson-Ungleichung – angeben. Für $u \in \mathbf{H}$ sei

$$E^{(j)}(u) = \inf_{v \in \mathbf{S}^{(j)}} \|u - v\|_{\mathbf{H}} = \|u - u^{(j)}\|_{\mathbf{H}},$$

3. DAS SIGNORINI-PROBLEM 3.4. Diskretisierung und Fehlerabschätzung

$s \geq 0$ der sogenannte Glattheitsparameter und $c > 0$ eine Konstante unabhängig von j , dann gilt

$$E^{(j)}(u) \leq cn^{(j)-s/3} \|u\|_{\mathbf{H}}. \quad (3.7)$$

Im nächsten Schritt diskretisieren wir die konvexe Menge \mathbf{K} der zulässigen Verschiebungen; wir ersetzen $\mathbf{K} \subset \mathbf{H}$ durch das diskrete Analogon $\mathbf{K}^{(j)} \subset \mathbf{S}^{(j)}$,

$$\mathbf{K}^{(j)} = \{v \in \mathbf{S}^{(j)} \mid v(p) \cdot n^{(j)}(p) \leq g^{(j)}(p) \quad \forall p \in P^{(j)} \cap \Gamma_S\},$$

wobei $n^{(j)}$ und $g^{(j)}$ geeignete Approximationen von n und g sind.

Bemerkung 3.13. Im Allgemeinen ist $\mathbf{K}^{(j)} \not\subset \mathbf{K}$, da die Einschränkungen hier punktweise gegeben sind.

Damit erhalten wir das diskrete Minimierungsproblem

$$u^{(j)} \in \mathbf{K}^{(j)} : \quad J(u^{(j)}) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathbf{K}^{(j)}. \quad (3.8)$$

Die Existenz und Eindeutigkeit von (3.8) ist durch Theorem 3.12 gesichert.

Für eine zulässige Zerlegung $T^{(j)}$ von Ω und eine ausreichend glatte Lösung $u \in \mathbf{K}$ von (3.4) läßt sich nun folgende Fehlerabschätzung angeben

$$E^{(j)}(u) \leq ch^{(j)} \|u\|_{\mathbf{H}}.$$

Sie sichert uns, dass die Lösung $u^{(j)} \in \mathbf{K}^{(j)}$ des diskreten Problems (3.8) für $j \rightarrow \infty$ gegen die Lösung $u \in \mathbf{K}$ von (3.4) konvergiert.