

Seminar WS 2001/02:

Numerik für nichtlineare Partielle Differentialgleichungen

Vortrag 1:

Abstrakte nichtlineare und quasilineare PDE

Henning Lemanczyk
Student Diplom Technomathematik

Veranstalter:

Prof. Dr. A. Schmidt
ZeTeM - Universität Bremen

November 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
1.1	Vorwort	3
1.2	Allgemeine Begriffe	3
1.3	Fréchet-Ableitung	4
2	Abstrakte nicht-lineare Partielle Differentialgleichungen	4
2.1	Fehlerschätzer für isolierte Lösungen	4
2.2	Abschätzung des Residuums	5
3	Quasilineare PDE zweiter Ordnung	6
3.1	Beschreibung	6
3.2	Diskretisierung	7
3.3	Fehlerabschätzungen	8
	Literatur	11

1 Einführung

1.1 Vorwort

Im Wintersemester 2001/2002 fand an der Universität Bremen das Seminar "Numerik für nichtlineare Partielle Differentialgleichungen" statt. Es wurde veranstaltet von Prof. Dr. A. Schmidt vom Zentrum für Technomathematik.

Der vorliegende Bericht fasst den Vortrag "Abstrakte nichtlineare und quasilineare PDE" zusammen, gehalten am 07. und 14. November 2001 von Henning Lemanczyk, Student im Diplomstudiengang Technomathematik.

Nach der Einführung grundlegender Begriffe (Kapitel 1) werden Sätze über die Abschätzung des Fehlers zwischen tatsächlicher und numerischer Lösung von abstrakten nichtlinearen (Kapitel 2) und quasilinearen (Kapitel 3) Partiellen Differentialgleichungen behandelt.

Der Vortrag basiert auf der Literatur von R. Verfürth (siehe [1]).

1.2 Allgemeine Begriffe

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$.

$\mathcal{T}_h$ ($h > 0$) sei eine konforme, nicht degenerierte **Triangulierung** von Ω mit **Simplizes** T .

Mit $\mathcal{E}(T)$ sei die Menge aller **Kanten** E eines Simplex T bezeichnet und es gelte:

$$\mathcal{E}_h := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}(T) = \mathcal{E}_\Omega \cup \mathcal{E}_\Gamma \quad (\text{Menge aller Kanten im Inneren/auf dem Rand}).$$

Entsprechend bezeichne $\mathcal{N}(T)$ die Menge aller **Knoten** x eines Simplex T und

$$\mathcal{N}_h := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}_\Omega \cup \mathcal{N}_\Gamma.$$

Weiter definiere für $T \in \mathcal{T}_h, E \in \mathcal{E}_h$:

$$\tilde{\omega}_T := \bigcup_{\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(T') \neq \emptyset} T', \quad \tilde{\omega}_E := \bigcup_{\mathcal{N}(E) \cap \mathcal{N}(T') \neq \emptyset} T'.$$

Der **Sprung bei x über E in Richtung n_E** (Normale zu E) ist gegeben durch:

$$[\varphi]_E(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(x + t n_E) - \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(x - t n_E).$$

$\psi_T, \psi_E \in C^\infty(T, \mathbb{R})$ seien Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi_T \leq 1, \quad \max_{x \in T} \psi_T(x) &= 1, \quad \psi_T = 0 \text{ auf } \partial T; \\ 0 \leq \psi_E \leq 1, \quad \max_{x \in E} \psi_E(x) &= 1, \quad \psi_E = 0 \text{ auf } \partial T \setminus E. \end{aligned} \quad (1)$$

Für $k \in \mathbb{N}$ definiere:

$$\mathbb{P}_k(\Omega) \quad : \quad k - \text{dimensionaler Polynomraum auf } \Omega,$$

$$\tilde{\mathbb{P}}_k(T) \quad := \quad \{p \in \mathbb{P}_k(T) \mid p(x_i) = 0, \ x_i \in \mathcal{N}(T)\},$$

$$S_h^{k,-1} \quad := \quad \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi|_T \in \tilde{\mathbb{P}}_k \ \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$S_h^{k,0} \quad := \quad S_h^{k,-1} \cap C(\bar{\Omega}),$$

$$W^{l,q}(\Omega) \quad := \quad \{\varphi \in L^q(\Omega) \mid \varphi \text{ } l\text{-mal schwach differenzierbar}\} \text{ Sobolevraum.}$$

Für den **Clément-Interpolations-Operator** $I_h : L^1(\Omega) \rightarrow S_h^{1,0}$ gelten folgende Abschätzungen mit $q \in [1, \infty]$:

$$\begin{aligned} \|\varphi - I_h \varphi\|_{k,q;T} &\leq c_1 h_T^{l-k} \|\varphi\|_{l,q;\tilde{\omega}_T} \quad \forall 0 \leq k \leq l \leq 2, \quad \varphi \in W^{l,q}(\tilde{\omega}_T), \\ \|\varphi - I_h \varphi\|_{q;E} &\leq c_2 h_E^{l-\frac{1}{q}} \|\varphi\|_{l,q;\tilde{\omega}_E} \quad \forall 1 \leq l \leq 2, \quad \varphi \in W^{l,q}(\tilde{\omega}_E), \end{aligned} \quad (2)$$

dabei sind $c_{1,2}$ nur abhängig von s , welches gegeben ist durch: $\frac{h_T}{\varrho_T} \leq s \ \forall T \in \mathcal{T}_h$.

Hier ist $h_{T,E}$ der Durchmesser (längste Seite) von T bzw. E und ϱ_T der Durchmesser der größten Kugel in T .

1.3 Fréchet-Ableitung

Definition 1.1 (Fréchet-Ableitung)

Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ offen, $f : U \rightarrow Y$, $x_0 \in U$

f heißt **Fréchet-differenzierbar** in x_0 , wenn gilt:

$$\exists A_{x_0} \in L(X, Y) : \frac{\|f(x) - f(x_0) - A_{x_0}(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0, \quad x \in U.$$

A_{x_0} heißt dann **Fréchet-Ableitung** von f in x_0 und man schreibt:

$$Df(x_0) = f'(x_0) := A_{x_0}, \quad Df : U \rightarrow L(X, Y).$$

Für Beispiele und weitere Ausführungen siehe [2].

2 Abstrakte nicht-lineare Partielle Differentialgleichungen

2.1 Fehlerschätzer für isolierte Lösungen

Seien im weiteren X, Y Banachräume, $Y^* = L(Y, \mathbb{R})$ Dualraum von Y , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die zugehörige duale Paarung; $F \in C^1(X, Y^*)$

Gesucht ist eine Lösung $u \in X$ der Gleichung:

$$F(u) = 0 . \quad (3)$$

Bemerkung 2.1

u heißt *reguläre Lösung* genau dann, wenn $DF(u)$ stetig invertierbar ist.

Dabei ist DF im Sinne von Definition 1.1 zu verstehen.

Satz 2.2

Sei $u_0 \in X$ reguläre Lösung von (3), DF lipschitz-stetig in x_0 , d.h.

$$\exists R_0 > 0 : \quad \gamma := \sup_{u \in B(u_0, R_0)} \frac{\|DF(u) - DF(u_0)\|_{L(X, Y^*)}}{\|u - u_0\|_X} < \infty . \quad (4)$$

Mit

$$R := \min\{R_0, \gamma^{-1} \|DF(u_0)^{-1}\|_{L(Y^*, X)}^{-1}, 2\gamma^{-1} \|DF(u_0)\|_{L(X, Y^*)}\} \quad (5)$$

gilt dann:

$$\frac{1}{2} \|DF(u_0)\|_{L(X, Y^*)}^{-1} \|F(u)\|_{Y^*} \leq \|u - u_0\|_X \leq 2 \|DF(u_0)^{-1}\|_{L(Y^*, X)} \|F(u)\|_{Y^*} . \quad (6)$$

Beweis:

Sei $u \in B(u_0, R) \implies \|u - u_0\|_X < R. \quad (*)$

Ansatz folgt aus dem Hauptsatz der Integralrechnung (zur Veranschaulichung seien ausschließlich in der folgenden Gleichung $u, u_0, x \in \mathbb{R}^n$):

$$f(u) = f(u_0) + \int_{u_0}^u f'(x) dx = f(u_0) + \int_0^1 f'(u_0 + t(u - u_0))(u - u_0) dt .$$

Da $F(u_0) = 0$ und mit Addition von $DF(u_0)(u - u_0)$ auf beiden Seiten erhält man hier:

$$DF(u_0)(u - u_0) = F(u) + \int_0^1 (DF(u_0) - DF(u_0 + t(u - u_0)))(u - u_0) dt .$$

Multiplikation mit $DF(u_0)^{-1}$ und Übergang zu den Normen ergibt:

$$\begin{aligned}
\|u - u_0\|_X &\leq \|DF(u_0)^{-1}\|_{L(Y^*, X)} \left\{ \|F(u)\|_{Y^*} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \|DF(u_0) - DF(u_0 + t(u - u_0))\|_{L(X, Y^*)} \|u - u_0\|_X dt \right\} \\
&\stackrel{(4)}{\leq} \|DF(u_0)^{-1}\|_{L(Y^*, X)} \left\{ \|F(u)\|_{Y^*} + \int_0^1 \gamma \|u_0 - (u_0 + t(u - u_0))\|_X \|u - u_0\|_X dt \right\} \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \|DF(u_0)^{-1}\|_{L(Y^*, X)} \left\{ \|F(u)\|_{Y^*} + \frac{1}{2} \gamma R \|u - u_0\|_X \right\} \\
&\stackrel{(5)}{\leq} \|DF(u_0)^{-1}\|_{L(Y^*, X)} \|F(u)\|_{Y^*} + \frac{1}{2} \|u - u_0\|_X \\
\implies \|u - u_0\|_X &\leq 2 \|DF(u_0)^{-1}\|_{L(Y^*, X)} \|F(u)\|_{Y^*}
\end{aligned}$$

Mit ähnlicher Vorgehensweise:

$$\begin{aligned}
\|F(u)\|_{Y^*} &\leq \|DF(u_0)\|_{L(X, Y^*)} \|u - u_0\|_X \\
&\quad + \int_0^1 \|DF(u_0 + t(u - u_0)) - DF(u_0)\|_{L(X, Y^*)} \|u - u_0\|_X dt \\
&\stackrel{(4), (*)}{\leq} \|DF(u_0)\|_{L(X, Y^*)} \|u - u_0\|_X + \frac{1}{2} \gamma R \|u - u_0\|_X \\
&\stackrel{(5)}{\leq} 2 \|DF(u_0)\|_{L(X, Y^*)} \|u - u_0\|_X \\
\implies \frac{1}{2} \|DF(u_0)\|_{L(Y^*, X)}^{-1} \|F(u)\|_{Y^*} &\leq \|u - u_0\|_X
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3

Die Voraussetzungen an F können etwas vereinfacht werden.

Angenommen $F \in C(X, Y^*)$, $F(u_0) = 0$ und es existiert ein $R > 0$, sowie zwei monoton steigende Homöomorphismen $\varrho, \sigma : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, so dass

$$\varrho \|u - u_0\|_X \leq \|F(u)\|_{Y^*} \leq \sigma \|u - u_0\|_X \quad \forall u \in B(u_0, R).$$

Dann gilt:

$$\sigma^{-1} \|F(u)\|_{Y^*} \leq \|u - u_0\|_X \leq \varrho^{-1} \|F(u)\|_{Y^*} \quad \forall u \in B(u_0, R).$$

2.2 Abschätzung des Residuums

Betrachte nun $X_h \subset X, Y_h \subset Y$ endlich dimensionale Unterräume, $F_h \in C(X_h, Y_h^*)$ diskrete Form von F , $u_h \in X_h$ Näherungslösung von

$$F_h(u_{0h}) = 0. \quad (7)$$

Im weiteren sind c, c_0, c_1 von h unabhängige Konstanten.

Satz 2.4

Sei $u_h \in X_h$ Näherungslösung von (7), $\|F_h(u_h)\|_{Y^*}$ "klein", $R_h \in L(Y, Y_h)$ Beschränkungsoperator, $\tilde{Y}_h \subset Y$ endlich dimensionaler Unterraum, $\tilde{F}_h : X_h \rightarrow Y^*$ Näherung von F in u_h , so dass

$$\|(Id_Y - R_h)^* \tilde{F}_h(u_h)\|_{Y^*} \leq c_0 \|\tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*}. \quad (8)$$

Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|F(u_h)\|_{Y^*} &\leq c_0 \|\tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} + \|(Id_Y - R_h)^*(F(u_h) - \tilde{F}_h(u_h))\|_{Y^*} \\ &\quad + \|R_h\|_{L(Y, Y_h)} \|F(u_h) - F_h(u_h)\|_{Y_h^*} + \|R_h\|_{L(Y, Y_h)} \|F_h(u_h)\|_{Y_h^*} \end{aligned} \quad (9)$$

sowie

$$\|\tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} \leq \|F(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} + \|F(u_h) - \tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*}. \quad (10)$$

Beweis:

zu (9): hinschreiben, ergänzen, abschätzen mit (8)

zu (10): Dreiecksungleichung □

Bemerkung 2.5

$$\begin{aligned} \|(Id_Y - R_h)^*(F(u_h) - \tilde{F}_h(u_h))\|_{Y^*} &\quad \text{bzw.} \\ \|F(u_h) - \tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} &\quad : \quad \text{Qualität der Näherung } \tilde{F}_h(u_h) \text{ an } F(u_h), \text{ Datenfehler} \\ \|(F(u_h) - F_h(u_h))\|_{Y_h^*} &\quad : \quad \text{Konsistenzfehler der Diskretisierung} \\ \|F_h(u_h)\|_{Y_h^*} &\quad : \quad \text{Residuum von } (7) \end{aligned}$$

3 Quasilineare PDE zweiter Ordnung

In diesem Kapitel folgt eine Anwendung der vorangegangenen, abstrakten Theorie auf quasilineare PDE zweiter Ordnung, illustriert anhand einiger Beispiele.

3.1 Beschreibung

Sei $G := \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Gebiet (Definitionsbereich), $a \in C^1(G, \mathbb{R}^n), b \in C(G, \mathbb{R})$

Betrachte:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot a(x, u, \nabla u) &= b(x, u, \nabla u) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (11)$$

wobei $A(x, y, z) := \left(\frac{1}{2}(\partial_{z_j} a_i(x, y, z) + \partial_{z_i} a_j(x, y, z)) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ positiv definit $\forall (x, y, z) \in G$.

Mit $r, q \in]1, \infty[$ setze:

$$X := \{u \in W^{1,r}(\Omega) : u = 0 \text{ auf } \Gamma\}, \quad \|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{1,r} = \|\nabla \cdot\|_r,$$

$$Y := \{\varphi \in W^{1,q}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma\}, \quad \|\cdot\|_Y := \|\cdot\|_{1,q} = \|\nabla \cdot\|_q$$

und $p := \frac{q}{q-1}$ der duale Exponent zu q .

Als schwache Form von (11) erhält man:

$$\langle F(u), \varphi \rangle := \int_{\Omega} a(x, u, \nabla u) \nabla \varphi - \int_{\Omega} b(x, u, \nabla u) \varphi \quad \forall \varphi \in Y. \quad (12)$$

Beispiel 3.1

1. α -Laplace-Operator

$$-\nabla \cdot (\|\nabla u\|^{\alpha-2} \nabla u) = f(x) \quad , \quad \alpha > 1, f \in L^p(\Omega)$$

wobei $r := q := \alpha$

$\alpha \geq 2$: Voraussetzung für Satz 2.2 erfüllt

$1 < \alpha < 2$: F nicht mehr differenzierbar, aber Bemerkung 2.3 anwendbar mit

$$\rho(t) := \underline{c}(\|u_0\|_X + t)^{\alpha-2}t, \quad \sigma(t) := \bar{c}t^{\alpha-1}$$

2. Wärmegleichung mit nicht-linearen Koeffizienten

$$-\nabla \cdot k(u) \nabla u = f - \mathbf{c} \cdot \nabla u$$

$$\begin{aligned} k &\in C^2(\mathbb{R}), \quad k(s) \geq \alpha > 0, \quad |k^{(l)}(s)| \leq \gamma \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad l = 0, 1, 2 \\ f &\in L^\infty(\Omega), \quad \mathbf{c} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad r := p \in]2, 4[\end{aligned}$$

3.2 Diskretisierung

Voraussetzungen wie in Abschnitt 3.1, (11) die zu diskretisierende Gleichung.

Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von Ω mit Bezeichnungen wie in Abschnitt 1.2,

$X_h \subset X \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, $Y_h \subset Y \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ die diskreten Räume.

Die Funktionen a und b werden auf stückweise lineare bzw. stückweise konstante Funktionen projiziert (lokale L^2 -Projektion $\pi_{k,T} : L^1(T) \rightarrow \mathbb{P}_{k|T}$):

$$\begin{aligned} a_h(x, u_h, \nabla u_h) &:= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \pi_{1,T} a(x, u_h, \nabla u_h), \\ b_h(x, u_h, \nabla u_h) &:= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \pi_{0,T} b(x, u_h, \nabla u_h), \end{aligned}$$

und $\tilde{F}_h$ ist mit a_h, b_h definiert wie F in (12) mit a, b .

Sei $R_h = I_h$ die Clément-Interpolierende (siehe (2)).

$\tilde{Y}_h := \text{span}\{\psi_T \nu, \psi_E P \sigma : \nu \in \mathbb{P}_{0|T}, \sigma \in \mathbb{P}_{1|E}, T \in \mathcal{T}_h, E \in \mathcal{E}_\Omega\}$,
wobei $P : L^\infty(E) \rightarrow L^\infty(T \cup T')$ ($E = T \cap T'$) Fortsetzungsoperator.

Zur Vereinfachung definieren wir folgende Größen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_T &:= \left\{ h_T^p \left\| -\nabla \cdot \left(a(\cdot, u_h, \nabla u_h) - a_h(\cdot, u_h, \nabla u_h) \right) - \left(b(\cdot, u_h, \nabla u_h) - b_h(\cdot, u_h, \nabla u_h) \right) \right\|_{0,p;T}^p \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_\Omega} h_E \left\| [n_E \cdot (a(\cdot, u_h, \nabla u_h) - a_h(\cdot, u_h, \nabla u_h))]_E \right\|_{p;E}^p \right\}^{1/p} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \eta_T &:= \left\{ h_T^p \left\| \nabla \cdot a_h(\cdot, u_h, \nabla u_h) + b_h(\cdot, u_h, \nabla u_h) \right\|_{0,p;T}^p \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_\Omega} h_E \left\| [n_E \cdot a_h(\cdot, u_h, \nabla u_h)]_E \right\|_{p;E}^p \right\}^{1/p} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{aligned} \quad (14)$$

Dabei misst ε_T die Qualität der Näherung von a und b durch a_h und b_h und η_T gibt den sogenannten **Fehlerschätzer** an.

Aus (12) folgt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \langle F(u_h), \varphi \rangle &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left(-\nabla \cdot a(x, u_h, \nabla u_h) - b(x, u_h, \nabla u_h) \right) \varphi \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \int_E [n_E \cdot a(x, u_h, \nabla u_h)]_E \varphi \quad \forall \varphi \in Y, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{F}_h(u_h), \varphi \rangle &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left(-\nabla \cdot a_h(x, u_h, \nabla u_h) - b_h(x, u_h, \nabla u_h) \right) \varphi \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \int_E [n_E \cdot a_h(x, u_h, \nabla u_h)]_E \varphi \quad \forall \varphi \in Y. \quad (16)
\end{aligned}$$

3.3 Fehlerabschätzungen

Satz 3.2

Sei $u \in X$ reguläre, schwache Lösung von (11), $u_h \in X_h$ Näherungslösung des diskreten Problems
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{1,r} &\leq c_1 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^p \right)^{\frac{1}{p}} + c_2 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_T^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + c_3 \|F(u_h) - F_h(u_h)\|_{Y_h^*} + c_4 \|F_h(u_h)\|_{Y_h^*} \quad (17)
\end{aligned}$$

sowie

$$\eta_T \leq c_5 \|u - u_h\|_{1,r;\omega_T} + c_6 \left(\sum_{T' \subset \omega_T} \varepsilon_{T'}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (18)$$

Beweis:

Aus den Sätzen 2.2 und 2.4 folgt bei geeigneter Wahl der Konstanten:

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{1,r} &\leq 2 \|DF(u)^{-1}\|_{L(Y^*, X)} \|F(u_h)\|_{Y^*} \\
&\leq 2 \|DF(u)^{-1}\|_{L(Y^*, X)} \left(c_0 \|\tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} + \|(Id_Y - R_h)^*(F(u_h) - \tilde{F}_h(u_h))\|_{Y^*} \right. \\
&\quad \left. + \|R_h\|_{L(Y, Y_h)} \|F(u_h) - F_h(u_h)\|_{Y_h^*} + \|R_h\|_{L(Y, Y_h)} \|F_h(u_h)\|_{Y_h^*} \right) \\
&\leq \tilde{c}_1 \|\tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} + \tilde{c}_2 \|(Id_Y - R_h)^*(F(u_h) - \tilde{F}_h(u_h))\|_{Y^*} \\
&\quad + c_3 \|(F(u_h) - F_h(u_h))\|_{Y_h^*} + c_4 \|F_h(u_h)\|_{Y_h^*}
\end{aligned}$$

Unter Hinzunahme der folgenden Abschätzungen für $\|(Id_Y - R_h)^*(F(u_h) - \tilde{F}_h(u_h))\|_{Y^*}$ und $\|\tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*}$ folgt daraus die Behauptung (17).

Für η_T sind entsprechende Abschätzungen möglich, ein detaillierter Beweis von Ungleichung (18) bleibt aus.

$$\begin{aligned}
&\|(Id_Y - R_h)^*(F(u_h) - \tilde{F}_h(u_h))\|_{Y^*} \\
&= \sup_{\substack{\varphi \in Y \\ \|\varphi\|_Y=1}} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left(-\nabla \cdot (a - a_h) - (b - b_h) \right) (\varphi - I_h \varphi) + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \int_E [n_E \cdot (a - a_h)]_E (\varphi - I_h \varphi) \right\} \\
&\quad \text{(Hölderungleichung)} \\
&\leq \sup_{\substack{\varphi \in Y \\ \|\varphi\|_Y=1}} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|\nabla \cdot (a - a_h) - (b - b_h)\|_{0,p;T} \|\varphi - I_h \varphi\|_{0,q;T} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \left(\|[n_E \cdot (a - a_h)]_E\|_{p;E} \|\varphi - I_h \varphi\|_{q;E} \right) \right\} \\
&\quad \text{(Abschätzungen (2))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\substack{\varphi \in Y \\ \|\varphi\|_Y=1}} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|\nabla \cdot (a - a_h) - (b - b_h)\|_{0,p;T} c_{21} h_T \|\varphi\|_{1,q;\tilde{\omega}_T} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \left(\|[n_E \cdot (a - a_h)]_E\|_{p;E} c_{22} h_E^{1/p} \|\varphi\|_{1,q;\tilde{\omega}_E} \right) \right\} \\
&\quad \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} , \|\varphi\|_{1,q;\tilde{\omega}_E} \leq \|\varphi\|_{1,q;\tilde{\omega}_T} \right) \\
&\leq c_{23} \sup_{\substack{\varphi \in Y \\ \|\varphi\|_Y=1}} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T \|\nabla \cdot (a - a_h) - (b - b_h)\|_{0,p;T} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} h_E^{1/p} \|[n_E \cdot (a - a_h)]_E\|_{p;E} \right) \|\varphi\|_{1,q;\tilde{\omega}_T} \right\} \\
&\quad (\text{Hölderungleichung für Summen}) \\
&\leq c_{23} \sup_{\substack{\varphi \in Y \\ \|\varphi\|_Y=1}} \left\{ \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T \|\nabla \cdot (a - a_h) - (b - b_h)\|_{0,p;T} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} h_E^{1/p} \|[n_E \cdot (a - a_h)]_E\|_{p;E} \right)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\varphi\|_{1,q;\tilde{\omega}_T}^q \right)^{1/q} \Big\} \\
&\quad (l_1 - \text{Norm} \leq \tilde{c} \, l_p - \text{Norm} \Rightarrow (|a| + |b|)^p \leq \tilde{c}(|a|^p + |b|^p); \text{Regularität der Triangulierung}) \\
&\leq c_{24} \sup_{\substack{\varphi \in Y \\ \|\varphi\|_Y=1}} \left\{ \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^p \|\nabla \cdot (a - a_h) - (b - b_h)\|_{0,p;T}^p \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} h_E \|[n_E \cdot (a - a_h)]_E\|_{p;E}^p \right) \right)^{1/p} \|\varphi\|_{1,q;\Omega} \Big\} \\
&= \frac{c_2}{\tilde{c}_2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_T^p \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Mit ähnlichen Argumenten folgt:

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} \\
&= \sup_{\substack{\varphi_h \in \tilde{Y}_h \\ \|\varphi_h\|_Y=1}} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (-\nabla \cdot a_h - b_h) \varphi_h + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \int_E [n_E \cdot a_h]_E \varphi_h \right\} \\
&\quad (\text{Hölderungleichung}) \\
&\leq \sup_{\substack{\varphi_h \in \tilde{Y}_h \\ \|\varphi_h\|_Y=1}} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|\nabla \cdot a_h - b_h\|_{0,p;T} \|\varphi_h\|_{0,q;T} \right) + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \left(\|[n_E \cdot a_h]_E\|_{p;E} \|\varphi_h\|_{q;E} \right) \right\} \\
&\quad (\text{Abschätzungen } (*), \text{ siehe unten}) \\
&\leq \sup_{\substack{\varphi_h \in \tilde{Y}_h \\ \|\varphi_h\|_Y=1}} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|\nabla \cdot a_h - b_h\|_{0,p;T} c_{11} h_T \|\varphi_h\|_{1,q;T} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \left(\|[n_E \cdot a_h]_E\|_{p;E} c_{12} h_E^{1/p} \|\varphi_h\|_{1,q;T} \right) \right\} \\
&\quad (\text{vgl. obigen Beweis}) \\
&\leq c_{14} \sup_{\substack{\varphi_h \in \tilde{Y}_h \\ \|\varphi_h\|_Y=1}} \left\{ \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^p \|\nabla \cdot a_h - b_h\|_{0,p;T}^p + \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} h_E \|[n_E \cdot a_h]_E\|_{p;E}^p \right) \right)^{1/p} \|\varphi_h\|_{1,q;\Omega} \right\} \\
&= \frac{c_1}{\tilde{c}_1} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^p \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Dabei gilt für die Abschätzungen (*):

$$\begin{aligned}
\|\varphi_h\|_{0,q;T} &\leq c_1 \frac{|\det D\Phi|^{1/2}}{h(\hat{T})} \|\hat{\varphi}_h\|_{0,q;\hat{T}} && \text{(Transformation auf Einheitssimplex } \hat{T}, \\
&&& \text{wobei } \Phi : \hat{T} \rightarrow T \text{ affin linear)} \\
&\leq c_2 \frac{|\det D\Phi|^{1/2}}{1} \underbrace{\|\nabla \hat{\varphi}_h\|_{0,q;\hat{T}}}_{\text{ist Norm, da } \hat{\varphi}_h \in \tilde{\mathbb{P}}_k} && \text{(Äquivalenz der Normen auf } \tilde{\mathbb{P}}_k(\hat{T})) \\
&\leq c_3 |\det D\Phi|^{1/2} \frac{h(T)}{|\det D\Phi|^{1/2}} \|\nabla \varphi_h\|_{0,q;T} && \text{(Rücktransformation auf } T) \\
&= c_{11} h_T \|\varphi_h\|_{1,q;T} \\
\|\varphi_h\|_{q;E} &= \left(\int_E |\varphi_h|^q \right)^{1/q} \leq c_1 \left(\frac{|E|}{|\hat{E}|} \right)^{1/q} \underbrace{\left(\int_{\hat{E}} |\hat{\varphi}_h|^q \right)^{1/q}}_{\text{Halbnorm auf } \mathbb{P}_k(\hat{T})} && \text{(Transformation auf } \hat{E}) \\
&\leq c_2 |E|^{1/q} \left(\int_{\hat{T}} |\nabla \hat{\varphi}_h|^q \right)^{1/q} && \text{(Äquivalenz der Normen auf } \tilde{\mathbb{P}}_k(\hat{T})) \\
&\leq c_3 \left(|E| \frac{|\hat{T}|}{|T|} \right)^{1/q} h \left(\int_T |\nabla \varphi_h|^q \right)^{1/q} && \text{(Rücktransformation auf } T) \\
&\leq c_4 \left(\frac{h^{d-1}}{h^d} \right)^{1/q} h \|\nabla \varphi_h\|_{0,q;T} && \text{(Abschätzungen für } |E| \text{ und } |T|) \\
&= c_{12} h_E^{1/p} \|\varphi_h\|_{1,q;T}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.3

Satz 3.2 ist für Beispiel 3.1,1 nur anwendbar, wenn $\alpha \geq 2$.

Für $1 < \alpha < 2$ kann man zeigen, dass die strenge Monotonie von F die eindeutige Lösbarkeit des schwachen Problems impliziert.

Satz 3.4

Sei $1 < \alpha < 2$, $u \in W^{1,\alpha}(\Omega)$ mit $u = 0$ auf Γ eindeutige Lösung von

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^{\alpha-2} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in W^{1,\alpha}(\Omega), \quad v = 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega, \quad (19)$$

$u_h \in X_h$ Näherungslösung eines diskretisierten Problems.

Dann folgt:

Ungleichung (17) aus Satz 3.2 gilt mit $p := \alpha$ sowie

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq c_5 \|u - u_h\|_{1,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}} + c_6 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}}. \quad (20)$$

Wenn u_h stückweise linear ist, gilt außerdem:

$$\varepsilon_T = h_T \|f - \pi_{0,T} f\|_{0,\alpha;T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (21)$$

Beweis:

(ohne)

□

Literatur

- [1] R. Verfürth: *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*; Wiley-Teubner, Chichester, 1996
- [2] G. Dziuk: Vorlesungsskript *Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen*, Kapitel 9: Nichtlineare Probleme; Universität Freiburg, 1999