Variationsungleichungen und deren numerische Behandlung

Ausarbeitung zum Seminarvortrag von Malte Peter

1 Variationsungleichungen

Schwache Formulierungen von partiellen Differentialgleichungen sind häufig als Variationsgleichung darstellbar. Bei Variationsproblemen besitzen die durch Nebenbedingungen eingeschränkten zulässigen Mengen oft auch andere als lineare Strukturen. Nicht selten führt dies zu Variationsungleichungen.

Definition 1
Sei V ein reeller Hilbertraum, $G \subset V$ abgeschlossen, konvex und nichtleer und sei $F : G \subset V \longrightarrow V^*$ gegeben. Die Beziehung

$$\text{gesucht } u \in G : \langle Fu, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in G \tag{1}$$

heißt *Variationsungleichung.*

Bemerkung:
Ist G ein linearer Unterraum von V, so kann jedes v als $v = u \pm z \in G$ geschrieben werden. Damit ist (1) äquivalent zu $\langle Fu, z \rangle = 0\ \forall\, z \in G$. Variationsungleichungen sind also eine Verallgemeinerung von Variationsgleichungen.

Beispiel (Hindernisproblem)
Gegeben sei eine dünne Membran, die über dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ durch eine Kraft der Flächendichte $f(x)$ ausgelenkt wird. Am Rand Γ von Ω sei die Membran fixiert, im Inneren durch $g(x)$ nach unten beschränkt.

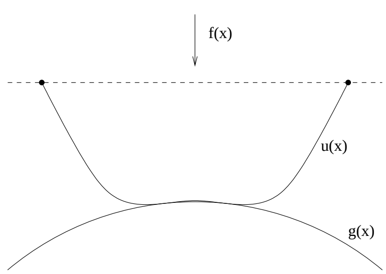

Abbildung 1: Hindernisproblem

Dies führt zu folgendem Ungleichungssystem für die Auslenkung $u \in H^2(\Omega)$:

$$\left.\begin{array}{rcl} -\Delta u & \geq & f \\ u & \geq & g \\ (\Delta u + f)(u-g) & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{in } \Omega$$
$$u|_\Gamma = 0 \tag{2}$$

Durch die üblichen Umformungen ergibt sich $u(x)$ als Lösung der Variationsungleichung

$$\text{gesucht } u \in G : \int_\Omega \nabla u\, \nabla(v-u)\, dx \;\geq\; \int_\Omega f\,(v-u)\, dx \quad \forall\, v \in G := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq g \text{ f.ü. in } \Omega\}. \tag{3}$$

Im weiteren genüge F den folgenden Eigenschaften:

- F sei stark monoton, d.h.

$$\exists\, \gamma > 0: \ \langle Fu - Fv, u - v \rangle \ \geq \ \gamma \cdot ||u - v||^2 \quad \forall\, u, v \in G \tag{4}$$

- F sei Lipschitz-stetig im folgenden Sinne:

$$\begin{array}{c} \exists \text{ stetige, monoton steigende Funktion } \nu : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : \\ ||Fu - Fv||_* \ \leq \ \nu(\delta) \cdot ||u - v|| \quad \forall\, u, v \in G_\delta := \{v \in G \mid ||v|| \leq \delta\} \end{array} \tag{5}$$

Lemma 2
Unter diesen Voraussetzungen existiert eine monotone Funktion $\mu : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, so daß gilt:

$$|\langle Fu, v \rangle| \ \leq \ \mu(||u||) \cdot ||v||$$

Beweis:
Sei $\tilde{v} \in G$ fixiert. Aus (5) folgt mit der Definition der Norm von V^*:

$$\begin{aligned} |\langle Fu - F\tilde{v}, v \rangle| \ &\leq \ \nu(\max\{||u||, ||\tilde{v}||\}) \ ||u - \tilde{v}|| \ ||v|| \\ |\langle Fu, v \rangle| - |\langle F\tilde{v}, v \rangle| \ &\leq \ \nu(\max\{||u||, ||\tilde{v}||\}) \ (||u|| + ||\tilde{v}||) \ ||v|| \\ |\langle Fu, v \rangle| \ &\leq \ \nu(\max\{||u||, ||\tilde{v}||\}) \ (||u|| + ||\tilde{v}||) \ ||v|| + |\langle F\tilde{v}, v \rangle| \\ |\langle Fu, v \rangle| \ &\leq \ \nu(\max\{||u||, ||\tilde{v}||\}) \ (||u|| + ||\tilde{v}||) \ ||v|| + ||F\tilde{v}||_* \, ||v|| \end{aligned}$$

Mit $\mu(s) := \nu(\max\{s, ||\tilde{v}||\}) \ (s + ||\tilde{v}||) + ||F\tilde{v}||_*$ folgt die Behauptung.

□

Lemma 3 (Projektionssatz)
Sei $Q \subset V$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem $y \in V$ genau ein $u \in Q$, so daß

$$\big(u - y \mid v - u\big) \ \geq \ 0 \quad \forall\, v \in Q.$$

Die durch $P_y := u$ definierte Projektion $P : V \longrightarrow Q$ ist nicht-expansiv, d.h. es gilt die Abschätzung $||Py - P\tilde{y}|| \ \leq \ ||y - \tilde{y}|| \ \forall\, y, \tilde{y} \in V$.

Beweis:
Siehe z.B. [4] S. 195 und 215

Satz 4
Die Variationsungleichung (1) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in G$. Dabei gilt mit der in Lemma 2 definierten Funktion $\mu : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ die Abschätzung $||u|| \ \leq \ \frac{1}{\gamma} \cdot \mu(||\hat{v}||) + ||\hat{v}||$ für beliebiges $\hat{v} \in G$.

Beweis:
Wähle $\delta > 0$ so, daß $G_\delta \neq \emptyset$ gilt (G_δ wie in (5)). G_δ ist konvex und abgeschlossen (G ist nach Voraussetzung konvex, die Kugel um 0 mit Radius δ ist konvex, also auch G_δ als Durchschnitt beider). Sei $j : V^* \longrightarrow V$ der Riesz'sche Darstellungsoperator und $P_\delta : V \longrightarrow G_\delta$ die Projektion auf G_δ gemäß Lemma 3. Definiere damit die Abbildung $T_{r\delta} : G_\delta \longrightarrow G_\delta$ durch

$$T_{r\delta} := P_\delta(Id - r \cdot jF)v.$$

Dabei sei $r > 0$ ein fester Parameter.
Untersuche nun das Kontraktionsverhalten von $T_{r\delta}$ in Abhängigkeit von r und δ.
P_δ ist nicht-expansiv, also genügt es, $Id - r \cdot jF$ zu betrachten:

$$\begin{aligned} ||(Id - r \cdot jF)v - (Id - r \cdot jF)\tilde{v}||^2 \ &= \ \big(v - \tilde{v} - r \cdot j(Fv - F\tilde{v}) \mid v - \tilde{v} - r \cdot j(Fv - F\tilde{v})\big) \\ &= \ \big(v - \tilde{v} \mid v - \tilde{v}\big) - 2r\big(jFv - jF\tilde{v} \mid v - \tilde{v}\big) + r^2\big(jFv - jF\tilde{v} \mid jFv - jF\tilde{v}\big) \\ &= \ ||v - \tilde{v}||^2 - 2r \cdot \langle Fv - F\tilde{v}, v - \tilde{v} \rangle + r^2 \cdot ||Fv - F\tilde{v}||_*^2 \\ \text{mit (4) und (5) gilt:} \quad &\leq \ (1 - 2 \cdot r \cdot \gamma + r^2 \cdot \nu^2(\delta)) \ ||v - \tilde{v}||^2 \qquad \forall\, v, \tilde{v} \in G_\delta \end{aligned}$$

Also ist $T_{r\delta}$ für $r \in \,]0, \frac{2\gamma}{\nu^2(\delta)}[$ eine Kontraktion auf G_δ.
Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz existiert somit genau ein $u_{r\delta} \in G_\delta$, so daß $T_{r\delta} u_{r\delta} = u_{r\delta}$ gilt.
Wegen Lemma 3 gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} \big(u_{r\delta} - (Id - r \cdot jF)u_{r\delta} \mid v - u_{r\delta}\big) &\geq 0 \quad \forall\, v \in G_\delta \\ \big(r \cdot jFu_{r\delta} \mid v - u_{r\delta}\big) &\geq 0 \quad \forall\, v \in G_\delta \\ \langle Fu_{r\delta}, v - u_{r\delta}\rangle &\geq 0 \quad \forall\, v \in G_\delta \end{aligned} \tag{6}$$

Damit löst $u_{r\delta} \in G_\delta$ eine durch $||v|| \leq \delta$ zusätzlich eingeschränkte Variationsungleichung (6).

Sei $\hat{v} \in G_\delta$ fixiert. Dann folgt aus (6):

$$\begin{aligned} \langle Fu_{r\delta} - F\hat{v} + F\hat{v}, \hat{v} - u_{r\delta}\rangle &\geq 0 \\ -\underbrace{\langle Fu_{r\delta} - F\hat{v}, u_{r\delta} - \hat{v}\rangle}_{\geq\, \gamma\cdot||u_{r\delta}-\hat{v}||^2} + \underbrace{\langle F\hat{v}, \hat{v} - u_{r\delta}\rangle}_{\leq\, \mu(||\hat{v}||)\cdot||u_{r\delta}-\hat{v}||} &\geq 0 \\ -\gamma \cdot ||u_{r\delta} - \hat{v}|| + \mu(||\hat{v}||) &\geq 0 \\ \text{und somit} \qquad \frac{1}{\gamma} \cdot \mu(||\hat{v}||) &\geq ||u_{r\delta} - \hat{v}|| \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung einer Differenz nach unten erhält man:

$$||u_{r\delta}|| \;\leq\; \frac{1}{\gamma} \cdot \mu(||\hat{v}||) + ||\hat{v}|| \tag{†}$$

Bei Vergrößerung von δ kann $\hat{v}$ fixiert bleiben, setze daher $\delta' > \max\{\delta\ ,\ \frac{1}{\gamma} \cdot \mu(||\hat{v}||) + ||\hat{v}||\}$. Zu diesem δ' wählt man ein r' so, daß die Fixpunktgleichung $T_{r'\delta'} u_{r'\delta'} = u_{r'\delta'}$ erfüllt ist und auch $||u_{r'\delta'}|| < \delta'$ gilt (dieses r' ist ggf. kleiner als r). Außerdem gilt mit dem zuvor gewählten $\hat{v}$ die Abschätzung $||u_{r'\delta'}|| \leq \frac{1}{\gamma} \cdot \mu(||\hat{v}||) + ||\hat{v}||$. Setze zur Vereinfachung der Schreibweise $u := u_{r'\delta'}$.
Wegen (6) gilt auf jeden Fall:

$$\langle Fu, v - u\rangle \;\geq\; 0 \quad \forall\, v \in G_{\delta'}$$

Es bleibt zu zeigen, daß auch

$$\langle Fu, v - u\rangle \;\geq\; 0 \quad \forall\, v \in G \tag{‡}$$

gilt. Dies soll durch Widerspruch bewiesen werden:
Angenommen, (‡) gilt nicht. Dann existiert ein $\bar{v} \in G : \langle Fu, \bar{v} - u\rangle < 0$. Wegen (6) muß damit $\bar{v} \notin G_{\delta'}$ und somit auch $||\bar{v}|| > \delta'$ gelten. Wähle $\tilde{v} := (1-\lambda)u + \lambda\bar{v}$ mit $\lambda = \frac{\delta - ||u||}{||\bar{v}|| - ||u||}$. Da $||u|| < \delta' < ||\hat{v}||$ gilt, ist $\lambda \in]0,1[$. Weiterhin:

$$\begin{aligned} ||\tilde{v}|| &= ||(1-\lambda)u + \lambda\bar{v}|| \\ &\leq (1-\lambda)||u|| + \lambda||\bar{v}|| \\ &= ||u|| - \frac{\delta' - ||u||}{||\bar{v}|| - ||u||}||u|| + \frac{\delta' - ||u||}{||\bar{v}|| - ||u||}||\bar{v}|| \\ &= \frac{||u||(||\bar{v}|| - ||u||) - (\delta' - ||u||)||u|| + (\delta' - ||u||)||\bar{v}||}{||\bar{v}|| - ||u||} \\ &= \frac{-\delta'||u|| + \delta'||\bar{v}||}{||\bar{v}|| - ||u||} \\ &= \delta' \end{aligned}$$

Da G konvex ist, gilt $\tilde{v} \in G_{\delta'}$. Andererseits:

$$\begin{aligned} \langle Fu, \tilde{v} - u\rangle &= \langle Fu, (1-\lambda)u + \lambda\bar{v} - u\rangle \\ &= \lambda\ \langle Fu, \bar{v} - u\rangle \\ &< 0 \end{aligned}$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu $\tilde{v} \in G_{\delta'}$. Also gilt $\langle Fu, v - u\rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in G$.
Die Eindeutigkeit der Lösung u folgt aus der starken Monotonie von F, (†) beweist die behauptete Abschätzung.

$\square$

Lemma 5
Es sei $J : G \longrightarrow \mathbb{R}$ ein auf G differenzierbares Funktional. Löst $u \in G$ das Variationsproblem

$$J(v) \longrightarrow \min \text{ bei } v \in G, \tag{7}$$

dann genügt u auch der Variationsungleichung

$$\langle J'(u), v - u\rangle \;\geq 0 \quad \forall v \in G. \tag{8}$$

Ist J sogar konvex, so bildet (8) auch eine hinreichende Bedingung dafür, daß $u \in G$ das Variationsproblem (7) löst.

Beweis:
Siehe z.B. [2] S. 36ff

2 Diskretisierung von Variationsungleichungen

Es soll die Variationsungleichung (1) unter den Voraussetzungen (4) und (5) betrachtet werden. Sei $V_h \subset V$ ein endlich-dimensionaler Unterraum, $G_h \subset V_h$ eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene Menge. Betrachte:

$$\text{gesucht } u_h \in G_h : \;\langle F u_h, v_h - u_h\rangle \;\geq\; 0 \quad \forall\, v_h \in G_h \tag{9}$$

Problem: Trotz $V_h \subset V \wedge G_h \subset V_h$ gilt im allgemeinen nicht $G_h \subset G$. Beim Hindernisproblem z.B. wählt man nicht $\tilde{G}_h = \{v_h \in V_h \mid v_h(x) \geq g(x) \text{ f. ü. in } \Omega\}$, sondern:

$$G_h := \{v_h \in V_h \mid v_h(p_i) \;\geq\; g(p_i)\ \forall\, i\} \tag{10}$$

Die p_i sind dabei die Gitterpunkte der Diskretisierung von Ω. Der Grund für diese Wahl ist die leichte Überprüfbarkeit der Bedingung. In den Knoten des Gitters läßt sich die Einhaltung leicht sicherstellen. Das folgende Bild veranschaulicht für das Hindernisproblem einen Fall, in dem $G_h \subset G$ nicht gilt:

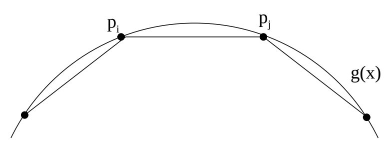

Abbildung 2: Beispiel für $G_h \not\subseteq G$

Wegen $G_h \not\subseteq G$ übertragen sich (4) und (5) nicht notwendig, so daß weitere Voraussetzungen an F gestellt werden müssen:
Sei $F : V \longrightarrow V^*$, also auf ganz V definiert und es gelte:

- F sei stark monoton:

$$\exists\, \gamma_h > 0 : \;\langle F u_h - F v_h, u_h - v_h\rangle \;\geq\; \gamma_h \cdot \|u_h - v_h\|^2 \quad \forall\, u_h, v_h \in G_h \tag{11}$$

- F sei Lipschitz-stetig

$$\begin{gathered}\exists \text{ stetige, monoton steigende Funktion } \nu : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : \\ \|Fu - Fv\|_* \;\leq\; \nu(\delta) \cdot \|u - v\| \quad \forall\, u, v \in V \text{ mit } \|u\|, \|v\| \;\leq\; \delta\end{gathered} \tag{12}$$

Satz 6
Die diskrete Variationsungleichung (9) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $u_h \in G_h$ und mit der analog zu Lemma 2 definierten Funktion μ gilt: $\|u_h\| \;\leq\; \frac{1}{\gamma_h} \cdot \mu(\|\hat{v}_h\|) + \|\hat{v}_h\|$ für beliebiges $\hat{v}_h \in G_h$.

Beweis:
Die Aussage des Satzes folgt wegen den zusätzlichen Voraussetzungen direkt aus Satz 4.

Es sei $V_h := \text{span}\{\varphi_i \mid i = 1 \dots N\}$, also besitzt $v_h \in V_h$ die Darstellung $v_h(x) = \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \varphi_i(x)$. Damit wird (9) zu:

$$\langle F(\sum_{i=1}^{N} u_j \varphi_j), \sum_{i=1}^{N} (v_i - u_i)\varphi_i \rangle \ \geq \ 0 \quad \forall\, v_h = \sum_{i=1}^{N} v_i \varphi_i \in G_h$$

Falls F linear ist, sind diese Gleichungen äquivalent zu den Galerkin-Gleichungen. Im vorliegenden allgemeinen Fall sind jedoch weitere Voraussetzungen an G_h nötig, um das System in ein überschaubares zu überführen.
Bei der Finitisierung (10) der Hindernisbedingung erhält man aus (2) das folgende Komplementaritätsproblem:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j & \geq & f_i & \\ u_i & \geq & g_i & \forall\, i = 1 \dots N \\ (\sum_{j=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j - f_i)(u_i - g_i) & = & 0 & \end{array}$$

mit $a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_\Omega \nabla \varphi_j \ \nabla \varphi_i \ dx$, $f_i = \int_\Omega f \, \varphi_i \, dx$ und $g_i = g(p_i)$.
Der Nachteil dieser Darstellung ist das Ungleichungssystem riesiger Dimension (um gute Auflösung zu erzielen).
Läßt sich die gegebene Variationsungleichung (1) entsprechend Lemma 5 als Optimalitätskriterium eines Variationsproblems darstellen, kann auch die diskrete Variationsungleichung (9) als Optimalitätskriterium

$$\langle J'(u_h), v_h - u_h \rangle \ \geq \ 0 \quad \forall\, v_h \in G_h$$

für das Problem $J(v_h) \longrightarrow \min$ bei $v_h \in G_h$ betrachtet werden.
Im Fall des Hindernisproblems (2) liefert dies die Aufgabe

$$J(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - f(v_h) \longrightarrow \min \quad \text{bei } v_h(p_i) \ \geq \ g(p_i) \quad \forall\, i = 1 \dots N \tag{$*$}$$

Mit der Steifigkeitsmatrix $A_h = \big(a(\varphi_j, \varphi_i)\big)_{ij}$ und $f_h = \big(f(\varphi_i)\big)_i$ sowie $g = \big(g(p_i)\big)_i$ und $v = (v_1, \dots, v_N)$ ist $(*)$ äquivalent zu

$$z(v) = \frac{1}{2} \cdot {}^t v A_h v - {}^t f_h v \longrightarrow \min \ \text{ bei } v \in \mathbb{R}^N, \quad v \ \geq \ g \text{ (komponentenweise)}$$

Die Nachteile dieser Darstellung sind die große Dimension (für gute Auflösung) und die spezielle Struktur.

Im folgenden soll nun $||u - u_h||$ bei fixierter Diskretisierung abgeschätzt werden.

Lemma 7
Der Operator $F : V \longrightarrow V^*$ genüge (4),(11) und (12). Ferner sei die übergreifende Eigenschaft

$$\gamma \, ||v - v_h||^2 \ \leq \ \langle Fv - Fv_h, v - v_h \rangle \quad \forall\, v \in G, v_h \in G_h \tag{13}$$

erfüllt. Dann besitzen die Variationsungleichungen (1) und (9) eindeutig bestimmte Lösungen $u \in G$ bzw. $u_h \in G_h$ und es gilt mit $\sigma := \nu(\max\{||u||, ||u_h||\})$:

$$\frac{\gamma}{2} \cdot ||u - u_h||^2 \leq \inf_{v \in G} \langle Fu, v - u_h \rangle \ + \inf_{v_h \in G_h} \{\langle Fu, v_h - u \rangle + \frac{\sigma^2}{2\gamma} \cdot ||v_h - u||^2\} \tag{14}$$

Beweis:
Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen u von (1) und u_h von (9) folgen aus Satz 4 bzw. Satz 6.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\gamma\,||u-u_h||^2 &\leq \langle Fu - Fu_h, u-u_h\rangle \\
&\leq \langle Fu,u\rangle - \langle Fu,u_h\rangle - \langle Fu_h,u\rangle + \langle Fu_h,u_h\rangle + \langle Fu,v\rangle - \langle Fu,v\rangle + \langle Fu_h,v_h\rangle - \langle Fu_h,v_h\rangle \\
&= \underbrace{\langle Fu,u-v\rangle}_{\leq 0} - \langle Fu,u_h-v\rangle - \langle Fu_h,u-v_h\rangle + \underbrace{\langle Fu_h,u_h-v_h\rangle}_{\leq 0} \quad \forall\, v\in G, v_h\in G_h
\end{aligned}$$

Da u, u_h Lösungen von (1) bzw. (9) sind, folgt:

$$\begin{aligned}
\gamma\,||u-u_h||^2 &\leq \langle Fu, v-u_h\rangle + \langle Fu, v_h-u\rangle - \langle Fu, v_h-u\rangle + \langle Fu_h, v_h-u\rangle \\
&= \langle Fu, v-u_h\rangle + \langle Fu, v_h-u\rangle + \langle Fu_h - Fu, v_h-u\rangle \\
&\leq \langle Fu, v-u_h\rangle + \langle Fu, v_h-u\rangle + ||Fu_h - Fu||_*\,||v_h-u|| \\
\text{und mit (12)} \quad &\leq \langle Fu, v-u_h\rangle + \langle Fu, v_h-u\rangle + \sigma\,||u_h-u||\,||v_h-u|| \quad \forall\, v\in G, v_h\in G_h
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\sigma}}\,||u-u_h|| - \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}}\,||v_h-u||\right)^2 &\geq 0 \\
\frac{\gamma}{\sigma}\,||u-u_h||^2 - 2||u-u_h||\,||v_h-u|| + \frac{\sigma}{\gamma}\,||v_h-u||^2 &\geq 0 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\sigma}\,||u-u_h||^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\,||v_h-u||^2\right) &\geq ||u-u_h||\,||v_h-u||
\end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$\frac{\gamma}{2}\cdot||u-u_h||^2 \leq \langle Fu, v-u_h\rangle + \langle Fu, v_h-u\rangle + \frac{\sigma^2}{2\gamma}\cdot||v_h-u||^2 \quad \text{für beliebiges } v\in G, v_h\in G_h$$

Somit ist das Lemma bewiesen.

□

Bemerkung:
Falls $G = V$ gegeben ist, ist (1) äquivalent zu $\langle Fu, v\rangle = 0\ \forall\, v\in V$. Dann liefert (14) die Abschätzung $||u-u_h|| \leq \frac{\sigma}{\gamma} \inf_{v_h\in V_h} ||v_h-u||$. Lemma 7 verallgemeinert also das Lemma von Cea.

Um das nächste Lemma beweisen zu können, werden zunächst Forderungen an G_h gestellt:

- $\forall\, v\in G\ \exists\,(v_h)_h$ in $G_h : \lim_{h\searrow 0} v_h = v$

- $v_h\in G_h$ und $v_h \rightharpoonup v$ für $h\searrow 0 \implies v\in G$

Lemma 8
Seien die Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllt und die Approximation G_h an G möge den obigen beiden Forderungen genügen. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß $\exists\,\gamma_0 : \gamma_h \geq \gamma_0\ \forall\, h > 0$. Dann gilt $\lim_{h\searrow 0} ||u-u_h|| = 0$.

Beweis:
Nutzen der Forderungen, Lemma 8.6 (siehe z.B. [1] S. 416)

Bemerkung:
Bei Variationsungleichungen ist es unsachgemäß, hohe Glattheitsannahmen zu treffen, da die Glattheit der Lösung nicht nur von Ω und der Regularität von F abhängt. Bei Hindernisproblemen ist z.B. $u\in H^2(\Omega)$ noch möglich. Gute Ergebnisse liefert bei elliptischen Variationsungleichungen 2. Ordnung bereits die Verwendung stückweise linearer $\mathcal{C}^0$-Elemente.

Ausgehend von (14) sollen nun die Summanden $\inf\limits_{v \in G} \langle Fu, v - u_h \rangle$ und $\inf\limits_{v_h \in G_h} \langle Fu, v_h - u \rangle$ untersucht werden.

Es sei $V := H_0^1(\Omega)$, dann gilt $V = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) = V^*$ (alle Einbettungen stetig). Es gelte mit einem $\tilde{F}u \in L^2(\Omega)$: $\langle Fu, v \rangle = \left(\tilde{F}u \,|\, v\right)_{L^2} \;\forall v \in V$. Damit ergibt sich insbesondere mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle Fu, v - u_h \rangle| \leq ||\tilde{F}u||_{L^2} \, ||v - u_h||_{L^2} \quad \text{und} \quad |\langle Fu, v_h - u \rangle| \leq ||\tilde{F}u||_{L^2} \, ||v_h - u||_{L^2} \tag{15}$$

Satz 9

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon und es gelte $f \in L^2(\Omega)$ sowie $g \in H^2(\Omega)$ mit $g|_\Gamma \leq 0$. Weiterhin genüge die Lösung u des zugehörigen Hindernisproblems (2) $u \in H^2(\Omega)$. Dann existiert ein $c > 0$, so daß für die mit stückweise linearen $\mathcal{C}^0$-Elementen und mit (10) erzeugte Näherungslösung u_h gilt:

$$||u - u_h|| \leq c \cdot h$$

Beweis: $u \in H^2(\Omega) \Rightarrow \langle Fu, v \rangle = -\int\limits_\Omega (\Delta u + f)\, v \, dx =: \left(\tilde{F}u \,|\, v\right)_{L^2} \;\forall v \in V$. Damit kann (15) angewandt werden. Sei $\Pi_h : V \longrightarrow V_h$ der durch Interpolation in den Gitterpunkten erklärte Interpolationsoperator. Da $u \in G$ ist, gilt für das Hindernisproblem mit (10) auch $\Pi_h u \in G_h$.

Weiterhin gilt mit $c > 0$ (Interpolationssätze):

$$||u - \Pi_h u||_{L^2} \leq c \cdot h^2 \qquad \text{und} \qquad ||u - \Pi_h u||_{H_0^1} \leq c \cdot h,$$

da $u \in H^2(\Omega)$ vorausgesetzt wurde. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\inf_{v_h \in G_h} \left\{ \langle Fu, v_h - u \rangle + \frac{\sigma^2}{2\gamma} \cdot ||v_h - u||^2 \right\} &\leq \langle Fu, \Pi_h u - u \rangle + \frac{\sigma^2}{2\gamma} \cdot ||\Pi_h u - u||^2 \\
&\leq ||\tilde{F}u||_{L^2} \, ||\Pi_h u - u||_{L^2} + \frac{\sigma^2}{2\gamma} \cdot ||\Pi_h u - u||^2 \\
&\leq const \cdot h^2
\end{aligned}$$

Sei $\hat{u}_h := \max\{u_h, g\}$ (punktweise). Man kann zeigen (siehe z.B. [3] S. 50ff), daß dann $\hat{u}_h \in V$ gilt. Aufgrund der Definition von G ist $\hat{u}_h$ somit auch ein Element von G. Mit (10) und der stückweisen Linearität ist ferner $u_h \in G_h$ genau dann, wenn $u_h \geq \Pi_h g$ vorliegt. Offensichtlich gilt nun

$$0 \leq (\hat{u}_h - u_h)(x) \leq |(g - \Pi_h g)(x)| \quad \forall x \in \Omega,$$

da die Ungleichung für die $x \in \Omega$, für die $\hat{u}_h = u_h$ vorliegt, trivialerweise erfüllt ist. Damit:

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in G} \langle Fu, v - u_h \rangle &\leq |\langle Fu, \hat{u}_h - u_h \rangle| \\
&\leq ||\tilde{F}u||_{L^2} \, ||\hat{u}_h - u_h||_{L^2} \\
&\leq ||\tilde{F}u||_{L^2} \, ||g - \Pi_h g||_{L^2}
\end{aligned}$$

Da $g \in H^2(\Omega)$ vorausgesetzt wurde, folgt mit den Interpolationssätzen:

$$\inf_{v \in G} \langle Fu, v - u_h \rangle \leq const \cdot h^2$$

Damit sind die beiden Summanden in (14) abgeschätzt und mit Anwendung von Lemma 7 und Ziehen der Quadratwurzel folgt die Behauptung.

□

Literatur

[1] Ch. Großmann / H.-G. Roos: *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Teubner Studienbücher (1994)

[2] I. Ekeland / R. Temam: *Convex Analysis and Variational Problems*, North Holland Publishing Company (1976)

[3] D. Kinderlehrer / G. Stampacchia: *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press Inc. (1980)

[4] D. Werner: *Funktionalanalysis*, Springer Verlag (2000)

[5] H. W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*, Springer Verlag (1999)