

Stationäre, inkompressible Navier-Stokes Gleichungen

Mariya Zhariy

Studiengang Technomathematik
Universität Bremen

Dez 2001

1 Physikalisches und mathematisches Modell

Um die Bewegungsgleichungen für viskose Flüssigkeiten herzuleiten, betrachtet man die Massenerhaltungsgleichung und das zweite Newtonsche Gesetz, das die Impulserhaltung beschreibt. Aus der Massenerhaltung bekommt man die sogenannte Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

Die Impulserhaltung liefert:

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \sigma + \varrho \mathbf{f} \quad (2)$$

Wobei ϱ – Flüssigkeitsdichte, $\mathbf{v}$ – (Euler-)Geschwindigkeit, σ – Spannungstensor, $\mathbf{f}$ – äußere Volumenkräfte; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ – substantielle Zeitableitung.

Bei den meisten Flüssigkeiten hängt der Spannungstensor σ linear von dem Geschwindigkeitsgradienten $\nabla \mathbf{v}$ ab (sog. Newtonsche Fluide):

$$\sigma_{rs} = -p\delta_{rs} + \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_r} \right), \quad r, s = 1, \dots, d \quad (3)$$

wobei μ – dynamische Viskosität des Fluids, p – der hydrostatische Druck.

Nach dem Einsetzen von (3) in (2) und unter der Annahme $\varrho = \text{const}$ (inkompressible Strömung) erhält man die Bewegungsgleichungen für inkompressible Newtonsche Fluide:

$$\varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \varrho \mathbf{f} \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5)$$

(4) ist die sogenannte Navier-Stokes Gleichung; (1) bzw. (5) heisst Kontinuitätsgleichung für kompressible bzw. inkompressible Fluide. Die Gleichung (4) ist d-dimensional, es sind also mit der Kontinuitätsgleichung insgesamt (d+1) Gleichungen für die unbekannten p und $\mathbf{v}$.

Im stationären Fall ($\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = 0$) erhält man aus (4) die Navier-Stokes Gleichungen für stationäre Geschwindigkeitsfelder:

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (6)$$

wobei ν – kinematische Viskosität des Fluids.

Oft betrachtet man das sogenannte Stokes-Problem, indem man auf die Bewegungsgleichungen (4)-(5) ein semidiskretes Verfahren anwendet. Man diskretisiert dabei nur in der Zeit: $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ wird durch den Differenzenquotienten $\frac{\mathbf{v}(t_{k+1}) - \mathbf{v}(t_k)}{\Delta t}$ ersetzt, der nichtlineare Konvektionsterm $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ wird zum Zeitpunkt t_k betrachtet. Dadurch bekommt man ein lineares, zeitunabhängiges Problem für jeden Zeitschritt t_k . Dieses wird im nächsten Abschnitt behandelt (siehe auch [1]).

2 Stokes-Problem

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_0 \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

wobei $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^d$. Hier wird die Dirichlet-Randbedingung $\mathbf{u} = 0$ auf dem ganzen Rand $\partial\Omega$ angenommen.

Sei $V := (H_0^1(\Omega))^d$ – Sobolev-Raum mit Nullrandwerten (Hilbert-Raum über Ω). $\mathcal{D}(\Omega)$ sei der Raum der auf Ω schnellabfallenden glatten Funktionen. $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ dicht. Um schwache Formulierung von (7) herzuleiten, multipliziere die erste Gleichung mit $\mathbf{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$ und integriere über Ω :

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$$

mit $(\cdot, \cdot)$ wird hier der L^2 -Skalarprodukt über Ω bezeichnet.

Definiere $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$ – Bilinearform über $V \times V$. Da der Raum $(\mathcal{D}(\Omega))^d$ dichter Teilraum von V ist, so erhalten wir die schwache Formulierung von Stokes-Problem (7):

Gesucht $\mathbf{u} \in V$, $p \in L^2(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Betrachte $V_{\operatorname{div}} := \{\mathbf{v} \in V \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$. Dieser Raum ist dichter Teilraum von V und mit der Norm $\|\mathbf{v}\|_{\operatorname{div}} := \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}$ ein Hilbert-Raum. Die oben definierte Bilinearform $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ist koerziv auf $V_{\operatorname{div}} \times V_{\operatorname{div}}$ und die durch das Skalarprodukt $(\mathbf{f}, \cdot)$ definierte Linearform stetig auf V_{div} . Die Gleichung (8) liefert:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\operatorname{div}} \tag{9}$$

Nach Satz von Lax-Milgram existiert eindeutige Lösung $\mathbf{u} \in V_{\operatorname{div}}$ von (9).

Durch die Wahl des Lösungsraumes V_{div} wurde der unbekannte Druck p aus der Gleichung (8) eliminiert. Wir betrachten folgendes Lemma, das die Existenz von p liefert.

Lemma 1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand, und sei L – ein Element von V^* (lineares stetiges Funktional über V). Das Funktional L verschwindet identisch auf V_{div} genau dann wenn eine Funktion $p \in L^2(\Omega)$ existiert mit*

$$L(\mathbf{v}) = (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

Beweis. Zum Beweis siehe Literaturhinweis aus [1]: Girault und Raviart (1986), s.22. $\square$

Als Folgerung betrachten wir folgenden Satz:

Satz 1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand, und sei $\mathbf{u}$ – eindeutige Lösung von (9) für jedes $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^d$. Dann gibt es eine bis auf Konstante eindeutige Funktion $p \in L^2(\Omega)$, so dass*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \tag{10}$$

Beweis. Sei $\mathbf{u}$ – Lösung von (9). Definiere

$$L(\mathbf{v}) := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

Nach (9) erfüllt Funktional L die Bedingungen von Lemma 1, es existiert also ein bis auf Konstante bestimmtes $p \in L^2(\Omega)$, das zusammen mit $\mathbf{u}$ die Gleichung (10) löst. $\square$

Man könnte die Lösungsräume anders definieren. Sei $Q := L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q = 0\}$ und $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $b(\mathbf{v}, q) := -(q, \nabla \cdot \mathbf{v})$, dann hat folgendes Problem:

Gesucht $\mathbf{u} \in V$, $p \in Q$ mit

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung, die eine schwache Lösung von (7) liefert.

3 Einige Ergebnisse aus der allgemeinen Theorie

In diesem Abschnitt werden einige Ergebnisse aus der Theorie der Nichtlinearen Partiellen Differentialgleichungen dargestellt, die in dieser Arbeit Anwendung finden. Näheres zu den Beweisen siehe [1].

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – Banach-Räume. Sei $F \in C^1(X, Y^*)$ ein stetig differenzierbares Funktional. Folgende Proposition liefert die a-posteriori Fehlerabschätzung für Funktionen aus der Lösungsumgebung folgender Gleichung:

$$F(u) = 0 \quad (11)$$

Proposition 1. *Sei $u_0 \in X$ reguläre Lösung von (11), d.h. $DF(u_0) \in \text{Isom}(X, Y^*)$. Sei DF Lipschitz-stetig in u_0 , d.h. es gibt ein $R_0 > 0$ mit*

$$\gamma := \sup_{u \in B(u_0, R_0)} \frac{\|DF(u) - DF(u_0)\|_{\mathcal{L}(X, Y^*)}}{\|u - u_0\|_X} < \infty$$

Sei

$$R := \min\{R_0, \gamma^{-1}\|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^*, X)}^{-1}, 2\gamma^{-1}\|DF(u_0)\|_{\mathcal{L}(X, Y^*)}\}$$

Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{2}\|DF(u_0)\|_{\mathcal{L}(X, Y^*)}^{-1}\|F(u)\|_{Y^*} \leq \|u - u_0\|_X \leq 2\|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^*, X)}\|F(u)\|_{Y^*}$$

für alle $u \in B(u_0, R)$.

□

Seien $X_h \subset X$ und $Y_h \subset Y$ endlichdimensionale Teilräume und $F_h \in C(X_h, Y_h^*)$ – Diskretisierung von F . Um den Fehler $\|F(u_{h0})\|_{Y^*}$ abzuschätzen, wobei $u_{h0} \in X_h$ die diskretisierte Gleichung

$$F_h(u_h) = 0 \quad (12)$$

löst, betrachte folgende Proposition:

Proposition 2. *Sei $u_h \in X_h$ – Näherungslösung von (12), d.h. $\|F_h(u_h)\|_{Y_h^*}$ sei “klein”. Betrachte den Projektionsoperator $R_h \in \mathcal{L}(Y, Y_h)$, endlichdimensionalen Teilraum $\tilde{Y}_h \subset Y$ und die Approximation $\tilde{F}_h : X_h \rightarrow Y^*$ von F in u_h , die folgende Ungleichung erfüllen:*

$$\|(\text{Id}_Y - R_h)^* \tilde{F}_h(u_h)\|_{Y^*} \leq c_0 \|\tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} \quad (13)$$

Dann gilt folgende Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} \|F(u_h)\|_{Y^*} &\leq c_0 \|\tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} + \|(\text{Id}_Y - R_h)^*[F(u_h) - \tilde{F}_h(u_h)]\|_{Y^*} \\ &\quad + \|R_h\|_{\mathcal{L}(Y, Y_h)}\|F(u_h) - F_h(u_h)\|_{Y_h^*} \\ &\quad + \|R_h\|_{\mathcal{L}(Y, Y_h)}\|F_h(u_h)\|_{Y_h^*} \end{aligned}$$

und

$$\|\tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} \leq \|F_h(u_h)\|_{Y_h^*} + \|F(u_h) - \tilde{F}_h(u_h)\|_{\tilde{Y}_h^*}$$

□

Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung mit dem Durchmesser h , $\mathcal{E}_h$ Menge aller Kanten dieser Triangulierung. Mit ω_T (ω_E) bezeichnen wir Vereinigung aller Simlizes, die mit dem Simplex T (der Kante E) eine gemeinsame Kante haben. Analog bezeichnet $\tilde{\omega}_T$ ($\tilde{\omega}_E$) Vereinigung aller Simlizes, die einen mit Simplex T (Kante E) gemeinsamen Knoten besitzen.

Für ein $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$S_h^{k,-1} := \{\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \phi|_T \in \Pi_k \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad S_h^{k,0} := S_h^{k,-1} \cap C(\bar{\Omega})$$

Weiter definiere $I_h : L^1(\Omega) \rightarrow S_h^{1,0}$ den Interpolationsoperator für die L^1 -Funktionen, deren Werte in den Gitterpunkten unverändert bleiben und linear auf jedem Simplex fortgesetzt werden.

Lemma 2. *Für alle $T \in \mathcal{T}_h$, $E \in \mathcal{E}_h$ und $1 \leq q \leq \infty$ gelten folgende Abschätzungen:*

$$\begin{aligned} \|\phi - I_h \phi\|_{k,q;T} &\leq c_1 h_T^{l-k} \|\phi\|_{l,q;\tilde{\omega}_T} & \forall 0 \leq k \leq l \leq 2, \phi \in W^{l,q}(\tilde{\omega}_T) \\ \|\phi - I_h \phi\|_{q;E} &\leq c_2 h_E^{l-1/q} \|\phi\|_{l,q;\tilde{\omega}_E} & \forall 1 \leq l \leq 2, \phi \in W^{l,q}(\tilde{\omega}_E) \end{aligned}$$

□

Sei $\hat{T}$ Einheitssimplex, $\hat{E}$ eine seiner Kanten. Seien $\psi_{\hat{T}}, \psi_{\hat{E}} \in C^\infty(\hat{T})$ Funktionen auf $\hat{T}$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $0 \leq \psi_{\hat{T}}, \psi_{\hat{E}} \leq 1$ auf $\hat{T}$
- $\psi_{\hat{T}} = 0$ auf $\partial\hat{T}$, $\psi_{\hat{E}} = 0$ auf $\partial\hat{T} \setminus \hat{E}$
- $\max_{x \in \hat{T}} \psi_{\hat{T}}(x) = 1$, $\max_{x \in \hat{E}} \psi_{\hat{E}}(x) = 1$

Sei $\hat{P} : L^\infty(\hat{E}) \rightarrow L^\infty(\hat{T})$ mit

$$\hat{P}u(x_1, \dots, x_d) := u(x_1, \dots, x_{d-1}), \quad x \in \hat{T}, u \in L_\infty(\hat{E})$$

Vortsetzungsoperator für die auf einer Kante $\hat{E}$ definierten Funktionen auf das ganze Simplex $\hat{T}$. Sei $F_T : \hat{T} \rightarrow T$ affine Abbildung von Einheitssimplex $\hat{T}$ auf ein gegebenes Simplex T . Man erhält auf T :

$$\psi_T := \psi_{\hat{T}} \circ F_T^{-1}, \quad \psi_E := \psi_{\hat{E}} \circ F_T^{-1}$$

und für eine auf E definierte Funktion σ sei der Vortsetzungsoperator $P : L^\infty(E) \rightarrow L^\infty(T)$ durch

$$P\sigma := (\hat{P}(\sigma \circ F_T)) \circ F_T^{-1}$$

definiert.

Lemma 3. *Es existieren Konstanten $c_1, \dots, c_7$, die nur von den Räumen $V_{\hat{T}}, V_{\hat{E}}$, Funktionen $\psi_{\hat{T}}, \psi_{\hat{E}}$, p und h_T/ρ_T abhängen, so dass für alle $T \in \mathcal{T}_h$, $E \in \mathcal{E}(T)$, $u \in V_T$ und $\sigma \in V_E$ folgende Ungleichungen gelten:*

$$\begin{aligned} c_1 \|u\|_{0,p;T} &\leq \sup_{v \in V_T} \frac{\int_T u \psi_T v}{\|v\|_{0,q;T}} \leq \|u\|_{0,p;T} \\ c_2 \|\sigma\|_{p;E} &\leq \sup_{\tau \in V_E} \frac{\int_E \sigma \psi_E \tau}{\|\tau\|_{q;E}} \leq \|\sigma\|_{p;E} \\ c_3 h_T^{-1} \|\psi_T u\|_{0,q;T} &\leq \|\nabla(\psi_T u)\|_{0,q;T} \leq c_4 h_T^{-1} \|\psi_T u\|_{0,q;T} \\ c_5 h_T^{-1} \|\psi_E P\sigma\|_{0,q;T} &\leq \|\nabla(\psi_E P\sigma)\|_{0,q;T} \leq c_6 h_T^{-1} \|\psi_E P\sigma\|_{0,q;T} \\ \|\psi_E P\sigma\|_{0,q;T} &\leq c_7 h_T^{1/q} \|\sigma\|_{q;E} \end{aligned}$$

□

4 A-posteriori Abschätzung für Navier-Stokes Gleichungen

Wir betrachten stationäre, inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

wobei $\nu > 0$ - konstante Viskosität des Fluids.

Setze

$$\begin{aligned} M &:= \left\{ \mathbf{u} \in (W^{1,2}(\Omega))^d : \mathbf{u} = 0 \text{ auf } \Gamma \right\}, \\ Q &:= \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p = 0 \right\} \end{aligned}$$

und definiere

$$\begin{aligned} X &:= Y := M \times Q, \\ \|\cdot\|_X &:= \|\cdot\|_Y := (\|\cdot\|_{1,2}^2 + \|\cdot\|_{0,2}^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

Multipliziere die erste Gleichung von (14) mit einem $\mathbf{v} \in M$, die zweite Gleichung mit $q \in Q$. Addition der beiden Gleichungen und Integration über Ω liefern:

$$\begin{aligned} \langle F([\mathbf{u}, p]), [\mathbf{v}, q] \rangle &:= \int_{\Omega} \left(-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f} \right) \mathbf{v} + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &= \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} \end{aligned}$$

Dadurch erhält man die schwache Formulierung des Problems (14):

Gesucht $[\mathbf{u}, p] \in X$ mit

$$\langle F([\mathbf{u}, p]), [\mathbf{v}, q] \rangle = 0 \quad \forall [\mathbf{v}, q] \in Y$$

Seien $M_h \subset M$ und $Q_h \subset Q$ zwei Finite-Elemente Räume zu Triangulierung $\mathcal{T}_h$. Wir nehmen an, es gibt $k, l \geq 1$ so dass folgende Stetigkeitsvoraussetzungen erfüllt sind:

$$(S_h^{1,0})^d \cap M \subset M_h \subset (S_h^{k,0})^d$$

und

$$S_h^{1,0} \cap Q \subset Q_h \subset S_h^{l,0} \quad \text{oder} \quad S_h^{0,-1} \cap Q \subset Q_h \subset S_h^{l,-1},$$

Definiere $X_h := Y_h := M_h \times Q_h$ und $F_h : X_h \rightarrow Y_h^*$ folgendermassen:

$$\begin{aligned} \langle F_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}_h, q_h] \rangle &:= \langle F([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}_h, q_h] \rangle \\ &+ \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \int_T \left(-\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f} \right) ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h + \nabla q_h) \\ &+ \delta \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \int_E [p_h]_E [q_h]_E \\ &+ \alpha \delta \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \end{aligned} \quad (15)$$

wobei $[\cdot]_E$ den Sprung auf der Kante E (die Differenz der Links- und Rechtsgrenzwerte) bezeichnet, $\alpha \geq 0$, $\delta \geq 0$ – die Stabilitätsparameter. Sind $\alpha, \beta > 0$, so haben die nichtlinearen Terme und Divergenzbedingung keinen Einfluss auf die Konvergenz der Lösung. Sonst hängt die Konvergenz der Lösung von der Wahl der Lösungsräume M_h , Q_h ab. Für $\delta = 0$ verschwindet der Konsistenzfehler komplett, für $\delta > 0$ bekommt man folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& \|F([\mathbf{u}_h, p_h]) - F_h([\mathbf{u}_h, p_h])\|_{Y_h^*} \\
&= \sup_{\substack{[\mathbf{v}_h, q_h] \in Y_h \\ \|[\mathbf{v}_h, q_h]\|_Y = 1}} \left\{ \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \int_T (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}) ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h + \nabla q_h) \right. \\
&\quad \left. + \delta \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \int_E [p_h]_E [q_h]_E + \alpha \delta \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{u}_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \right\} \\
&\leq c(1 + \alpha) \delta (1 + \|\mathbf{u}_h\|_{1,2}) \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^2 \|-\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}\|_{0,2;T}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{0,2;T}^2 \right) + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \| [p_h]_E \|_{2;E}^2 \right\}^{1/2} \tag{16}
\end{aligned}$$

Sei $R_h[\mathbf{u}, p] := [I_h u_1, \dots, I_h u_d, 0]$ – Projektionsoperator von Y auf Y_h ,

$\tilde{Y}_h := \text{span} \left\{ [\psi_T \mathbf{v}, 0], [\psi_E P \sigma, 0], [0, \psi_T p] : \mathbf{v} \in [\Pi_{m|T}]^d, \sigma \in [\Pi_{m'|E}]^d, p \in \Pi_{k-1|T}, T \in \mathcal{T}_h, E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \right\}$ – endlichdimensionaler Teilraum von Y , wobei $m := \max\{2k-1, l-1, 0\}$ und $m' := \max\{k-1, l\}$. $\Pi_{k|T}$ bzw. $\Pi_{k|E}$ enthalten Funktionen, die auf T bzw. auf E Polynome k -ten Grades sind.

$\tilde{F}_h : X_h \rightarrow Y^*$ sei definiert durch

$$\langle \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q] \rangle := \int_\Omega \left(-\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \pi_{0,T} \mathbf{f} \right) \mathbf{v} + \int_\Omega q \nabla \cdot \mathbf{u}_h$$

($\mathbf{f}$ wird durch $\pi_{0,T} \mathbf{f}$ auf jedem Simplex $T \in \mathcal{T}_h$ konstant angenähert)

Lemmata 2 und 3 liefern:

$$\begin{aligned}
\| \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]) - F([\mathbf{u}_h, p_h]) \|_{\tilde{Y}_h^*} &= \sup_{\substack{[\mathbf{v}_h, q_h] \in \tilde{Y}_h \\ \|[\mathbf{v}_h, q_h]\|_Y = 1}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{f} - \pi_{0,T} \mathbf{f}) \mathbf{v}_h \\
&\leq c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\mathbf{f} - \pi_{0,T} \mathbf{f}\|_{0,2;T}^2 \right\}^{1/2} \tag{17}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\| (\text{Id}_Y - R_h)^* [\tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]) - F([\mathbf{u}_h, p_h])] \|_{Y^*} &= \sup_{\substack{[\mathbf{v}, q] \in Y \\ \|[\mathbf{v}, q]\|_Y = 1}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^n \int_T (f_i - \pi_{0,T} f_i) (v_i - I_h v_i) \\
&\leq c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\mathbf{f} - \pi_{0,T} \mathbf{f}\|_{0,2;T}^2 \right\}^{1/2} \tag{18}
\end{aligned}$$

Als Abkürzung führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$\begin{aligned}
\eta_T &:= \left\{ h_T^2 \|-\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \pi_{0,T} \mathbf{f}\|_{0,2;T}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \| [\nu \mathbf{n}_E \cdot \nabla \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}_E]_E \|_{2;E}^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{0,2;T}^2 \right\}^{1/2} \tag{19}
\end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q] \rangle &:= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \pi_{0,T} \mathbf{f}) \mathbf{v} \right. \\ &\quad \left. + \int_T q \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right) + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \int_E [\nu \mathbf{n}_E \cdot \nabla \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}_E]_E \mathbf{v} \end{aligned} \quad (20)$$

gilt für alle $[\mathbf{v}, q] \in Y$. Wir folgern aus Lemma 2 und Lemma 3:

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h])\|_{\tilde{Y}_h^*} &= \sup_{\substack{[\mathbf{v}_h, q_h] \in \tilde{Y}_h \\ \|[\mathbf{v}_h, q_h]\|_Y = 1}} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \pi_{0,T} \mathbf{f}) \mathbf{v}_h \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_T q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right) + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \int_E [\nu \mathbf{n}_E \cdot \nabla \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}_E]_E \mathbf{v}_h \right\} \\ &\leq c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (21)$$

und

$$\begin{aligned} \|(\text{Id}_Y - R_h)^* \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h])\|_{Y^*} &= \sup_{\substack{[\mathbf{v}, q] \in Y \\ \|[\mathbf{v}, q]\|_Y = 1}} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{i=1}^n \int_T (-\nu \Delta u_{h,i} + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) u_{h,i} + \partial_i p_h - \pi_{0,T} f_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (v_i - I_h v_i) + \int_T q \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right\} + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \sum_{i=1}^n \int_E [\nu \mathbf{n}_E \cdot \nabla u_{h,i} - p_h n_{Ei}]_E (v_i - I_h v_i) \right\} \\ &\leq c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (22)$$

Um die Bedingung (13) der Proposition 1 zu zeigen, betrachte ein Simplex $T \in \mathcal{T}_h$ und eine Kante $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$ und definiere $\tilde{Y}_{h|\omega}$, $\omega \in \{T, \omega_E, \omega_T\}$ analog zu $\tilde{Y}_h$. Definition von $\tilde{Y}$, Gleichung (20), und Lemma 3 liefern folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} c_1 \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{0,2;T} &\leq \sup_{r \in \Pi_{k-1|T} \setminus \{0\}} \|r\|_{0,2;T}^{-1} \int_T \nabla \cdot \mathbf{u}_h \psi_T r \\ &= \sup_{r \in \Pi_{k-1|T} \setminus \{0\}} \langle \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [0, \psi_T r] \rangle \|r\|_{0,2;T}^{-1} \\ &\leq \sup_{\substack{[\mathbf{v}, q] \in \tilde{Y}_{h|T} \\ \|[\mathbf{v}, q]\|_Y = 1}} \langle \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q] \rangle \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} c_1 c_4^{-1} h_T \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \pi_{0,T} \mathbf{f}\|_{0,2;T} &\leq \sup_{\mathbf{w} \in [\Pi_{m,T}]^n \setminus \{0\}} \|\nabla(\psi_T \mathbf{w})\|_{0,2;T}^{-1} \int_T (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \pi_{0,T} \mathbf{f}) \psi_T \mathbf{w} \\ &= \sup_{\mathbf{w} \in [\Pi_{m,T}]^n \setminus \{0\}} \|\nabla(\psi_T \mathbf{w})\|_{0,2;T}^{-1} \langle \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\psi_T \mathbf{w}, 0] \rangle \\ &\leq \sup_{\substack{[\mathbf{v}, q] \in \tilde{Y}_{h|T} \\ \|[\mathbf{v}, q]\|_Y = 1}} \langle \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q] \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

Ungleichung (24) liefert:

$$\begin{aligned}
& c_2 c_6^{-1} c_7^{-1} h_E^{1/2} \| [\nu \mathbf{n}_E \cdot \nabla \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}_E]_E \|_{2;E} \\
& \leq \sup_{\sigma \in [\Pi_{m',E}]^n \setminus \{0\}} c_2 c_6^{-1} c_7^{-1} h_E^{1/2} \| \sigma \|_{2;E}^{-1} \int_E [\nu \mathbf{n}_E \cdot \nabla \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}_E] \psi_E P \sigma \\
& = \sup_{\sigma \in [\Pi_{m',E}]^n \setminus \{0\}} c_2 c_6^{-1} c_7^{-1} h_E^{1/2} \| \sigma \|_{2;E}^{-1} \left\{ \langle \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\psi_E P \sigma, 0] \rangle \right. \\
& \quad \left. - \int_{\omega_E} (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \pi_{0,T} \mathbf{f}) \psi_E P \sigma \right\} \\
& \leq \sup_{\substack{[\mathbf{v}, q] \in \tilde{Y}_h|_{\omega_E} \\ \|[\mathbf{v}, q]\|_Y = 1}} \langle \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q] \rangle + c_6^{-1} h_E \| -\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \pi_{0,T} \mathbf{f} \|_{0,2;\omega_E} \\
& \leq c \sup_{\substack{[\mathbf{v}, q] \in \tilde{Y}_h|_{\omega_E} \\ \|[\mathbf{v}, q]\|_Y = 1}} \langle \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q] \rangle
\end{aligned} \tag{25}$$

Aus den Ungleichungen (23) bis (25) kann man schließen, dass

$$\eta_T \leq \sup_{\substack{[\mathbf{v}, q] \in \tilde{Y}_h|_{\omega_T} \\ \|[\mathbf{v}, q]\|_Y = 1}} \langle \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q] \rangle \tag{26}$$

und

$$c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \leq c \| \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]) \|_{\tilde{Y}_h^*} \tag{27}$$

Ungleichungen (21), (22) und (27) zeigen die Bedingung (13) der Proposition 1 und damit ist $\| \tilde{F}_h([\mathbf{u}_h, p_h]) \|_{\tilde{Y}_h^*}$ von unten und von oben beschränkt durch $\left\{ \sum_T \eta_T^2 \right\}^{1/2}$. Propositionen 1, 2 und Ungleichungen (16), (17), (18), (21) und (26) liefern folgende a-posteriori Abschätzung:

Satz 2. *Sei $[\mathbf{u}, p]$ schwache Lösung von (14), die regulär im Sinne der Proposition 1 sei und $[\mathbf{u}_h, p_h] \in X_h$ sei Lösung von*

$$\langle F_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}_h, q_h] \rangle = 0 \quad \forall [\mathbf{v}_h, q_h] \in Y_h,$$

die genügend nah zu $[\mathbf{u}, p]$ im Sinne von Proposition 1. Dann gilt folgende a-posteriori Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\{ \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{1,2}^2 + \| p - p_h \|_{0,2}^2 \}^{1/2} & \leq c_1 \left(1 + (1 + \alpha) \delta (1 + \| \mathbf{u}_h \|_{1,2}) \right) \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \\
& \quad + c_2 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \| \mathbf{f} - \pi_{0,T} \mathbf{f} \|_{0,2;T}^2 \right\}^{1/2}, \\
\eta_T & \leq c_3 \left\{ \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{1,2;\omega_T}^2 + \| p - p_h \|_{0,2;\omega_T}^2 \right\}^{1/2} \\
& \quad + c_4 \left\{ \sum_{T' \in \omega_T} h_{T'}^2 \| \mathbf{f} - \pi_{0,T'} \mathbf{f} \|_{0,2;T'}^2 \right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

wobei η_T gegeben durch (19) und $c_1, \dots, c_4$ nur von der polynomialen Ordnung der FE-Räume abhängige Konstanten.

□

Literatur

- [1] Verfürth, Rüdiger: A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques, Wiley-Teubner, 1996