

Numerik II

WS 2001/2002 — Übung 7 — 05.12.2001

Abgabe: 12.12.2001

Aufgabe 19 (Skalierungs-Vorkonditionierer) (6 Punkte)

Als *Skalierung* bezeichnen wir eine reguläre Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{NN}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

a) Zu einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ sei

$$\tilde{D} = \text{diag}(\tilde{d}_{ii}) \quad \text{mit} \quad \tilde{d}_{ii} = \frac{1}{\sum_{j=1}^N |a_{ij}|}$$

die Zeilen-Skalierung bzgl. der euklidischen Norm. Zeigen Sie: Dann ist

$$\text{cond}_{\infty}(\tilde{D}A) \leq \text{cond}_{\infty}(DA)$$

für jede Skalierung $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Dabei bezeichnet $\text{cond}_{\infty}(M) = \|M\|_{\infty} \|M^{-1}\|_{\infty}$ die Kondition einer regulären Matrix M bzgl. der Maximum-Norm.

b) Zeigen Sie: Für die Spalten-Skalierung

$$\tilde{D} = \text{diag}(\tilde{d}_{jj}) \quad \text{mit} \quad \tilde{d}_{jj} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N |a_{ij}|}$$

gilt

$$\text{cond}_{\infty}(A\tilde{D}) \leq \text{cond}_{\infty}(AD)$$

für jede Skalierung $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Aufgabe 20 (6 Punkte)

a) Stellen Sie ein Rekursionsschema auf zur ILU-Zerlegung der 2D Finite Differenzen Matrix A_h zur Gitterweite $h = 1/(n+1)$. Dabei soll das Besetzungsmuster der Matrix A_h verwendet werden.

b) Zeigen Sie, dass die unvollständige Zerlegung die Form

$$M = (\tilde{D} + L)\tilde{D}^{-1}(\tilde{D} + R)$$

hat, wobei $A_h = L + D + R$ die Zerlegung von A in linken unteren, diagonalen, und rechten oberen Anteil bezeichnet und $\tilde{D}$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lautet die Rekursionsformel für die Diagonalelemente von $\tilde{D}$?