Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt

Höhere Mathematik I

WS 2005/06 — **Übung 5** — 28.11.2005
Abgabe: 05.12.2005

Aufgabe 21 (2 Punkte)
Beweisen Sie die Abschätzung

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad \Big| |x| - |y| \Big| \leq |x - y|$$

Aufgabe 22 (6 Punkte)

a) Zu $a < b$ sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Polynome $p : [a, b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass durch

$$d(p, q) := \max\{|p(x) - q(x)| : \; x \in [a, b]\}$$

eine Metrik auf $\mathbb{P}$ definiert ist.

b) Sei X eine nichtleere Menge. Für $x, y \in X$ sei

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Ist d eine Metrik auf X?

Aufgabe 23 (6 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

b) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N$ gilt: $b_n \neq 0$.

c) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und mit einem $k \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ dass $a_n = b_{n+k}$,
so ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.
(Der Grenzwert ist also unabhängig vom Anfang der Folge).

Aufgabe 24 (6 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus Satz 3.27:
Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ und sei $c \in \mathbb{C}$.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

c) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.
Benutzen Sie dabei die Teile b) und c) von Aufgabe 23 um zu zeigen, dass der Grenzwert der Quotientenfolge sinnvoll gebildet werden kann.