Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt

# Höhere Mathematik I

WS 2005/06 — **Übung 8** — 09.01.2006
Abgabe: 16.01.2006

**Aufgabe 34** (2 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.
Zeigen Sie: $f$ nimmt dann jeden Wert $y \in [f(a), f(b)]$ **genau einmal** an.

**Aufgabe 35** (6 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen gleichmäßig stetig auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ sind:

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, c) $f(x) = \sqrt{x}$.

**Aufgabe 36** (8 Punkte)
Die Glieder der nachstehenden Funktionenfolgen $(f_n)$ seien stetige Funktionen auf $D = [0, 1]$:

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, b) $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$.

i) Bestimmen Sie die jeweils zugehörige Grenzfunktion $f$ und entscheiden Sie, ob $f$ stetig oder unstetig ist.

ii) Überprüfen Sie, ob die Funktionenfolgen gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen ihre Grenzfunktion konvergieren.

**Aufgabe 37** (4 Punkte)
Sei $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx}$ für $x \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass $(f_n)$ zwar nicht auf ganz $\mathbb{R}_+$, aber für jedes $a > 0$ auf dem Intervall $[a, \infty)$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f$ konvergiert.