Zentrum für
Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. D. Zvegincev

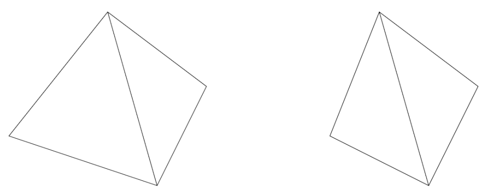
Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2020/21 — Übung 9 — 19.01.2021
Abgabe: 26.01.2021 — Abgabe Programmieraufgabe: 02.02.2021

Aufgabe 18 (6 Punkte)
Zum diskreten Maximumprinzip für lineare Finite Elemente Funktionen
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zulässig trianguliert durch $\mathcal{S}$ und $(\varphi_i)_{i=1,\dots,N}$ die Knotenbasis zu den stückweise linearen Finiten Elementen auf $\mathcal{S}$. Zeigen Sie: Wenn gelten soll

$$\int_\Omega \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j \leq 0 \qquad \forall\; i \neq j$$

dann muss die Triangulierung $\mathcal{S}$ *schwach spitz* sein, d.h. für je zwei benachbarte Dreiecke $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ mit gemeinsamer Kante $E = S_1 \cap S_2$ darf die Summe der beiden Winkel in S_1, S_2 gegenüber E nicht größer als $180°$ sein.

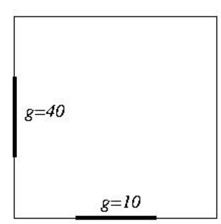


Links: schwach spitze Triangulierung, rechts: nicht schwach spitz

Programmieraufgabe 4 (12 Punkte)
Arbeiten Sie sich in die Löung von stationären elliptischen Problemen mit der Finite-Elemente-Methode mit FEniCS ein und bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben (vgl. Programmieraufgaben 1, 2):

a) Berechnen Sie die stationäre Wärmeverteilung in einem quadratischen Raum $\Omega = (0,1)^2$ ohne innere Wärmequelle (also mit $f = 0$) mit den folgenden Temperaturrandwerten:

   Im Bereich $(0.3, 0.7) \times \{0\}$ befindet sich ein Fenster, dort gilt $g = 10$, im Bereich $\{0\} \times (0.3, 0.7)$ befindet sich eine Heizung, dort gilt $g = 40$, an allen anderen Randpunkten ist $g = 20$.



b) Lösen Sie mit Ihrem Programm das Problem (vgl. Aufgabe 3, dort u_α mit $\alpha = 1.5$):

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega = (-1,1)^2 \setminus ([0,1] \times [-1,0]), \\ u(r\cos\phi, r\sin\phi) &= r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\phi\right) && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

   Welche Konvergenzraten (H^1-Norm bzw. L_2-Norm) beobachten Sie?